Serie 10

zur 19. und 20. KW (10.05. - 23.05.2010)

Aufgabe 1: (*Programmieraufgabe*)

Betrachten Sie das Lotka-Volterra Problem

$$\begin{cases} \dot{q} = q(p-1) \\ \dot{p} = p(2-q) \end{cases}$$

und wenden Sie das explizite Euler- und das symplektische Euler-Verfahren mit $h = 0.1$ an.

- Berechnen Sie die ersten Terme der modifizierten Differentialgleichungen ($\dot{\tilde{y}} = f(\tilde{y}) + hf_2(\tilde{y}) + \mathcal{O}(h^2)$).
  Hinweis: Schreiben Sie das symplektische Euler-Verfahren in expliziter Form und vereinfachen Sie mit einer Taylor-Entwicklung bis $\mathcal{O}(h^3)$.

- Plotten Sie die numerischen Lösungen der ursprünglichen Gleichung und diejenigen der modifizierten Gleichungen.

Aufgabe 2:

Beweisen Sie das Lemma aus der Vorlesung:

$$|b(t)| \leq \ln(2)\nu^{\rho(t)}\rho(t)! \quad \text{mit} \quad \nu = \kappa + \frac{\mu}{2\ln(2)-1} .$$

Suchen Sie dazu eine Erzeugenden-Funktion $b(\zeta) := b_1\zeta + b_2\zeta^2 + b_3\zeta^3 + \ldots$, so dass $\frac{|b(t)|}{\rho(t)!} \leq b_\rho$ für $\rho(t) = \rho$.

Hinweis: Folgen Sie den Schritten:

- *Seien $c(t)$ die Koeffizienten einer B-Reihe, so dass $\frac{|c(t)|}{\rho(t)!} \leq c_\rho$ für $\rho(t) = \rho$. Wir setzen $c(\zeta) := c_0 + c_1\zeta + c_2\zeta^2 + \ldots$. Zeigen Sie, dass $\frac{|\partial_b c(t)|}{\rho(t)!} \leq d_\rho$ für $\rho(t) = \rho$ mit d_ρ den Koeffizienten von $d(\zeta) := c(\zeta)b(\zeta)$. Schreiben Sie dazu $\sum_{u\circ\gamma v} \ldots$ als $\sum_{j=0}^{\rho(t)-1} \sum_{\substack{u\circ\gamma v=t \\ \rho(u)=j}} \cdots$.*

- *Zeigen Sie, dass $\frac{|\partial_b^{j-1} b(\zeta)|}{\rho(t)!} \leq (b(\zeta)^j)_\rho$.*

- *Da* $\dfrac{\mu\zeta}{1-\kappa\zeta} = \mu\zeta + \mu\kappa\zeta^2 + \mu\kappa^2\zeta^3 + \dots$ *und* $\dfrac{|a(t)|}{\rho(t)!} \leq \mu\kappa^{\rho(t)-1}$*, definieren wir* $b(\zeta)$ *durch*
$$b(\zeta) = \frac{\mu\zeta}{1-\kappa\zeta} + \sum_{j\geq 2} \frac{1}{j!} b(\zeta)^j = \frac{\mu\zeta}{1-\kappa\zeta} + \mathrm{e}^{b(\zeta)} - 1 - b(\zeta).$$
Zeigen Sie, dass $\dfrac{|b(t)|}{\rho(t)!} \leq b_\rho$.
- *Zeigen Sie, dass* $b(\zeta)$ *analytisch ist für* $|\zeta| \leq \dfrac{1}{\nu}$*. Somit können Sie die Cauchy-Formel anwenden und zeigen, dass* $|b(t)| \leq M\nu^{\rho(t)}\rho(t)!$*. Wählen Sie o. B.* $M = \ln(2)$.

Aufgabe 3: (*Programmieraufgabe*)

Betrachten Sie das Pendel mit der Hamilton-Funktion $H(p,q) = \dfrac{p^2}{2} - \cos(q)$. Sei K eine kompakte Teilmenge von $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; |x| \leq c\}$. Zeigen Sie, dass
$$||f(p,q)|| \leq \sqrt{c^2 + 4R^2 + \mathrm{e}^{2R}}$$
für $||(p,q) - (p_0,q_0)|| \leq 2R$ und $(p_0,q_0) \in K$. Wählen Sie nun $c = 2$ und $R = 1$ und finden Sie ein M. Berechnen Sie damit das h^* für die Mittelpunktsregel und plotten Sie p gegen q mit den verschiedenen Anfangswerten $(p_0,q_0) = (0,-1.5), (0,-2.5), (1.5,-\pi), (2.5,\pi)$. Können Sie h auch grösser wählen, um zufriedenstellende Ergebnisse zu erhalten?

Aufgabe 4:

Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine stetige Zufallsvariable. Zeigen Sie, dass

1. $\mathbb{E}[\,\alpha X + Y\,] = \alpha\mathbb{E}[\,X\,] + \mathbb{E}[\,Y\,]$,
2. $\mathbb{E}[\,\alpha + X\,] = \alpha + \mathbb{E}[\,X\,]$,
3. $\mathrm{Var}[\,\mathrm{X}\,] = \mathbb{E}[\,\mathrm{X}^2\,] - (\mathbb{E}[\,\mathrm{X}\,])^2$,
4. $\mathrm{Var}[\,\alpha\mathrm{X}\,] = \alpha^2\mathrm{Var}[\,\mathrm{X}\,]$.

Aufgabe 5:

Sei $X \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{E}[\,X\,] = \mu$ und $\mathrm{Var}[\,\mathrm{X}\,] = \sigma^2$.

Abgabe bis 24.05.2010, 14:00

Allgemeine Informationen zur Vorlesung und Übungsblätter befinden sich auf der Webseite `http://www.math.unibas.ch/~cohen`