Serie 11

zur 21. KW (24.05. - 30.05.2010)

Aufgabe 1:

Sei $W(t)$ eine Brownsche Bewegung. Zeigen Sie, dass

- $\mathbb{E}[\,W(t)\,] = 0$,
- $\mathbb{E}[\,W(t)^2\,] = t$,
- $\mathbb{E}[\,W(t)W(s)\,] = \min(s,t)$.

Aufgabe 2: (*Programmieraufgabe*)

Plotten Sie 3 Samples einer Brownschen Bewegung.
Hinweis: Siehe Aufgabe 7 für ein Gerüst.

Aufgabe 3:

Zeigen Sie, dass für das Stratonovich-Integral gilt:

$$\int_0^T W(t) \circ \mathrm{d}W(t) = \frac{1}{2}W(t)^2.$$

Hinweis: $W(\frac{1}{2}(t_i + t_{i+1})) = \frac{1}{2}(W(t_i) + W(t_{i+1})) + Z_i$ *mit* $Z_i \sim \mathcal{N}(0, \frac{t_{i+1}-t_i}{4})$.

Aufgabe 4:

Beweisen Sie, dass das Itô-Integral die folgenden Eigenschaften erfüllt:

1. Linearität,
2. Itô-Isometrie:
   $\mathbb{E}[\,(\int_0^T h(t)\mathrm{d}W(t))^2\,] = \int_0^T \mathbb{E}[\,(h(t))^2\,]\mathrm{d}t$,
3. $\mathbb{E}[\,(\int_0^T h(t)\mathrm{d}W(t))(\int_0^T g(t)\mathrm{d}W(t))\,] = \mathbb{E}[\,\int_0^T h(t)g(t)\,]\mathrm{d}t$.

Aufgabe 5:

Verwenden Sie die Itô-Formel um zu zeigen, dass

- $4\int_0^t W^3(s)\mathrm{d}W(s) = W^4(t) - \int_0^t 6W^2(s)\mathrm{d}s$,
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbb{E}[\,W^4(t)\,] = 6t$,
- $\mathbb{E}[\,W^4(t)\,] = 3t^2$,
- $\mathbb{E}[\,(W^2(t) - t)^2\,] = 2t^2$.

Aufgabe 6:

Berechnen Sie die exakte Lösung der Black-Scholes Gleichung für $S(t) > 0$:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}S(t) =& aS(t)\mathrm{d}t + bS(t)\mathrm{d}W(t), \\ S(0) =& S_0 > 0. \end{aligned}$$

<u>Hinweis:</u> *Verwenden Sie die Itô-Formel für $U(t, S) = \ln(S)$.*

Aufgabe 7: (*Programmieraufgabe*)

Betrachte

$$\begin{cases} \mathrm{d}X(t) = aX(t)\mathrm{d}t + bX(t)\mathrm{d}W(t) \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

auf $0 \leq t \leq T$ mit $a = 1.5$, $b = 1$, $T = 1$ und $X_0 = 1$. Die exakte Lösung lautet

$$X(t) = X_0 \exp((a - \frac{1}{2}b^2)t + bW(t)).$$

Plotten Sie ein Sample der exakten Lösung und die numerischen Lösungen des Euler-Maruyama Vefahrens mit $\triangle t = 4{\cdot}2^{-8},\ 2{\cdot}2^{-8},\ 2^{-8}$. Berechnen Sie ebenfalls den Fehler bei $T = 1$.

<u>Hinweis:</u> *Gerüst:*

```
W = zeros(1,N+1);   % Brownsche Bewegung
W(1) = 0;
for l = 1:N
    W(l+1) = ...;
end

X_ex = ...;   % exakte Loesung

hold on
plot(t,X_ex,'k-')

Dt = [4*2^-8 2*2^-8 2^-8];

for i = 1:length(Dt)   % numerische Loesung

    N_num = ...;
    R = N/N_num;   % wird dann in Xtemp verwendet
    X_em = zeros(1,N_num);
    Xtemp = X0;

    for j = 1:N_num
        Xtemp = ...;   % Euler-Maruyama
        X_em(j) = ...;
```

```
    end

    err = ...

    plot(0:Dt(i):T,[X0,X_em],'r--')
    xlabel('t')
    ylabel('X(t)','Rotation',0)

end
```

Aufgabe 8:

Lemma von Gronwall. Beweisen Sie:
Sei $I = [0, T] \subset \mathbb{R}$ und ϕ integrierbar auf I und A, B positiven Konstanten. Es gelte

$$0 \leq \phi(t) \leq A + B \int_0^t \phi(s)\,\mathrm{d}s \quad \forall\, t \in I.$$

Dann gilt die Gronwallsche Ungleichung

$$\phi(t) \leq A\mathrm{e}^{Bt} \quad \forall\, t \in I.$$

Hinweis: Setzen Sie $y(t) := \mathrm{e}^{-Bt} \int_0^t \phi(s)\,\mathrm{d}s$ und leiten Sie nach t ab. Durch erneutes Integrieren erhalten Sie die Ungleichung.

Abgabe bis 31.05.2010, 14:00

Allgemeine Informationen zur Vorlesung und Übungsblätter befinden sich auf der Webseite
`http://www.math.unibas.ch/~cohen`