Zusammenfassung: Kapitel 2

- Wir betrachten das Problem
$$\begin{aligned} \dot{y} &= f(t,y), \\ y(t_0) &= y_0. \end{aligned}$$
Seien $s \geq 1$ eine ganze Zahl, $b_i, a_{ij} \in \mathbb{R}$ für $i,j = 1,\ldots,s$ und $c_i = \sum_{j=1}^{s} a_{ij}$. Das numerische Verfahren
$$\begin{cases} k_i &= f(t_0 + c_i h, y_0 + h \sum_{j=1}^{s} a_{ij} k_j) \quad i = 1,2,\ldots,s \\ y_1 &= y_0 + h \sum_{j=1}^{s} b_j k_j \end{cases}$$
heisst ein *s-stufiges Runge-Kutta Verfahren*. Notation: $\begin{array}{c|c} c & a \\ \hline & b \end{array}$.
Beispiele: Explizites Euler-Verfahren; Implizites Euler-Verfahren; Mittelpunktsregel; usw.

- Das *Kollokationspolynom* $u(x)$ vom Grad s zu den Stützstellen $0 \leq c_1 < c_2 < \ldots < c_s \leq 1$ ist definiert durch
$$\begin{cases} u(t_0) &= y_0 \\ u'(t_0 + c_i h) &= f(t_0 + c_i h, u(t_0 + c_i h)) \quad i = 1,\ldots,s. \end{cases}$$
Das *Kollokationsverfahren* ist dann definiert durch
$$y_1 = u(t_0 + h).$$
Ein Kollokationsverfahren ist ein s-stufiges Runge-Kutta Verfahren mit
$$a_{ij} = \int_0^{c_i} \ell_i(\tau)\mathrm{d}\tau \text{ und } b_i = \int_0^1 \ell_i(\tau)\mathrm{d}\tau,$$
wobei $\ell_i(\tau)$ das Lagrange-Polynom vom Grad $s-1$ ist.
Ein Kollokationsverfahren hat die gleiche Ordnung wie die zu Grunde liegende Quadraturformel $(b_i, c_i)_{i=1}^{s}$.
Beispiel: *Gauss-Verfahren*: c_i sind die Nullstelle des Legendre Polynom und so hat das RK-Kollokationsverfahren die (maximale) Ordnung $p = 2s$. Für $s = 1$ erhalten wir die Mittelpunktsregel.

- Wir haben die Ordnungs-Theorie mit den Bäumen gesehen.

- Ein Einschrittverfahren $y_1 = \Phi_h(y_0)$ ist *symmetrisch*, falls $\Phi_h \circ \Phi_{-h} = Id$ oder $\Phi_h = \Phi_{-h}^{-1}$. Das Verfahren $\Phi_h^* := \Phi_{-h}^{-1}$ ist das *adjungierte Verfahren*.

  Ein Runge-Kutta Verfahren ist symmetrisch, falls

  $$a_{i,j} + a_{s+1-i,s+1-j} = b_{s+1-j} \text{ und } b_i = b_{s+1-i}.$$

  Beispiel: Die Mittelpunktsregel ist symmetrisch.

- Wir betrachten das Problem

  $$\begin{aligned} \dot{p} &= f(p,q), \\ \dot{q} &= g(p,q). \end{aligned}$$

  Seien (b_i, a_{ij}) und $(\hat{b}_i, \hat{a}_{ij})$ die Koeffizienten zweier Runge-Kutta Verfahren. Ein *s-stufiges partitioniertes Runge-Kutta Verfahren* lautet

  $$\begin{cases} k_i &= f(p_0 + h\sum_{j=1}^{s} a_{ij}k_j, q_0 + h\sum_{j=1}^{s} \hat{a}_{ij}\ell_j) \quad i = 1,2,\dots,s \\ \ell_i &= g(p_0 + h\sum_{j=1}^{s} a_{ij}k_j, q_0 + h\sum_{j=1}^{s} \hat{a}_{ij}\ell_j) \quad i = 1,2,\dots,s \\ p_1 &= p_0 + h\sum_{j=1}^{s} b_j k_j \\ q_1 &= q_0 + h\sum_{j=1}^{s} \hat{b}_j \ell_j \end{cases}$$

  Beispiele: Symplektisches Euler-Verfahren; Störmer-Verlet Verfahren; usw.

- *„Composition methods“*. Sei $\Phi_h(y)$ ein symmetrisches Verfahren der Ordnung $p = 2k$. Falls $2b_1 + b_0 = 1$ und $2b_1^{2k+1} + b_0^{2k+1} = 0$ dann ist das Verfahren $\Psi_h := \Phi_{b_1 h} \circ \Phi_{b_0 h} \circ \Phi_{b_1 h}$ symmetrisch der Ordnung $p = 2k + 2$.

  Beispiel: Sei Φ_h symmetrisch der Ordnung 2 (Mittelpunktsregel, Störmer-Verlet). Um Ordnung 4 zu erreichen nimmt man $b_1 = 1/(2 - \sqrt[3]{2}) \approx 1.35$ und $b_0 = -\sqrt[3]{2} b_1 \approx -1.7$. Diese Prozedur kann man natürlich fortsetzen. Achtung: Da $b_i < 0$ kann das Problem schlecht konditioniert sein.