Zusammenfassung: Kapitel 3

- Wir betrachten das Problem

$$\begin{aligned} \dot{y} &= f(y), \\ y(t_0) &= y_0. \end{aligned}$$

  Eine nicht-konstante Funktion $I(y)$ heisst *Invariante* (*Erhaltungsgrösse, first integral*), falls

$$I'(y)f(y) = 0 \qquad \forall\, y.$$

  Daraus folgt, dass $I(y(t)) = I(y_0) = Konst.$ entlang Lösungen unseres Problems.

  Beispiele: Die gesamte Energie $H(p,q)$ eines Hamiltonschen Systems; Die gesamte Masse einer chemischen Reaktion; usw.

- Alle Runge-Kutta Verfahren erhalten lineare Invarianten.

  Ein PRK für

$$\begin{aligned} \dot{p} &= f(p,q) \\ \dot{q} &= g(p,q) \end{aligned}$$

  erhält lineare Invarianten $I(p,q)$, falls $b_i = \hat{b}_i$ oder, falls $I(p,q)$ nur von p oder q abhängt.

- Für eine Matrix-Gleichung

$$\begin{aligned} \dot{Y} &= B(Y)Y \\ Y(0) &= Y_0 \end{aligned}$$

  mit $B(Y)$ schiefsymmetrisch, is $g(Y) := Y^TY$ eine Erhaltungsgrösse.

  Beispiel: Starrer Körper.

- Gauss-Verfahren erhalten *quadratische Invarianten*, d.h.

$$y_n^TCy_n = y_0^TCy_0 \qquad \forall\, n,$$

  wobei C symmetrisch ist.

  Runge-Kutta mit Koeffizienten, die

$$b_ia_{ij} + b_ja_{ji} = b_ib_j \qquad \forall\, i,j$$

  erfüllen, erhalten quadratische Invarianten $I(y) = y^TCy$, wobei C symmetrisch ist.

  Ähnliches Resultat für PRK.

- Polynomiale Invariante: Für $n \geq 3$ können keine Runge-Kutta Verfahren alle polynomialen Invarianten vom Grad n erhalten.

- Wir betrachten *Differentialgleichungen auf Mannigfaltigkeiten*: Sei

  $$\mathcal{M} := \{y : g(y) = 0\}$$

  eine $(n-m)$-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ mit $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und eine Differentialgleichung $\dot{y} = f(y)$ so, dass

  $$y_0 \in \mathcal{M} \implies y(t) \in \mathcal{M}.$$

  Wir definieren das *Projektionsverfahren* folgendermassen:

  1. Sei $y_n \in \mathcal{M}$
  2. Wir setzen $\tilde{y}_{n+1} := \tilde{\Phi}_h(y_n)$, wobei $\tilde{\Phi}_h$ ein beliebiges Einschrittverfahren ist
  3. Wir projizieren nun $\tilde{y}_{n+1}$ auf $\mathcal{M}$, um y_{n+1} zu finden. Hier muss man ein nichtlineares Gleichungsystem lösen.

  Dieses Verfahren hat dieselbe Ordnung wie das Verfahren $\tilde{\Phi}_h$.

  Achtung: Bei einer Projektion soll man *alle* Invarianten unseres Problems kennen.

  Wir haben noch eine symmetrische Variante gesehen (*Vorteil: bessere Langzeit Eigenschaften*).