Zusammenfassung: Kapitel 4

- Die Bewegungsgleichung allgemeiner mechanischer Systeme, deren Position durch Koordinaten $q = (q_1, \ldots, q_d)^T$ festgelegt ist, ist gegeben durch die *Lagrange-Gleichung*

  $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q},$$

  mit der *Lagrange Funktion* $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - U(q)$. Hier beschreibt $T(q, \dot{q})$ die *kinetische Energie* und $U(q)$ die *potentielle Energie*.

  Hamilton hatte die geniale Idee eine neue Variable einzuführen

  $$p_k := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}, \quad k = 1, \ldots, d$$

  das *Momentum* und die *Hamilton-Funktion*

  $$H(p, q) := p^T \dot{q} - \mathcal{L}(q, \dot{q})$$

  zu betrachten. Dies liefert uns die *Hamilton-Gleichungen*

  $$\begin{aligned} \dot{p} &= -\nabla_q H(p, q), \\ \dot{q} &= \nabla_p H(p, q). \end{aligned}$$

  Im wichtigen Fall $T(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^T M(q)\dot{q}$ mit $M(q)$ SPD ist die Hamilton-Funktion die *Gesamteenergie* $H = T + U$ unseres Problems.

- Eine differenzierbare Abbildung $g : U \longrightarrow \mathbb{R}^{2d}$, mit $U \subset \mathbb{R}^{2d}$, heisst *symplektisch*, falls für jedes $(p, q) \in U$ die Ableitung $g'(p, q)$ eine symplektische lineare Abbildung ist, d.h.

  $$g'(p, q)^T J g'(p, q) = J \;\; \forall \;\; (p, q) \in U,$$

  mit $J = \begin{pmatrix} 0 & I_d \\ -I_d & 0 \end{pmatrix}$.

  Der Fluss eines Hamiltonschen Systems ist symplektisch.

  Falls der Fluss der Differentialgleichung $\dot{y} = f(y)$ symplektisch für alle Zeiten in einer Umgebung von Null ist, dann ist diese Differentialgleichung *lokal Hamiltonisch*. D.h. lokal gilt $f(y) = J^{-1}\nabla H(y)$.