Zusammenfassung: Kapitel 5

- Ein Einschrittverfahren $y_{n+1} = \Phi_h(y_n)$, $\Phi_h : \mathbb{R}^{2d} \to \mathbb{R}^{2d}$ ist *symplektisch*, falls Φ_h symplektisch ist:
$$\Phi_h'(y_n)^T J \Phi_h'(y_n) = J,$$
mit $J = \begin{pmatrix} 0 & I_d \\ -I_d & 0 \end{pmatrix}$ und wobei $\Phi_h'(y_n) = \frac{\partial \Phi_h(y_n)}{\partial y_n}$.

  Beispiel: Mittelpunktsregel.

- Falls die Koeffizienten eines Runge-Kutta Verfahrens
$$b_i a_{ij} + b_j a_{ji} = b_i b_j \qquad \forall\, i, j$$
erfüllen, dann ist das Verfahren symplektisch.

  Idee des Beweises: Betrachte das Hamiltonische Problem zusätzlich mit der *variationellen Gleichung*
$$\dot{\Psi} = J^{-1} \nabla^2 H(y) \Psi, \quad \Psi(0) = I.$$
Wir beobachten, dass $\Psi^T J \Psi$ eine quadratische Invariante ist und so erhält das Verfahren diese Invariante.

  Beispiel: Gauss-Kollokationsverfahren.

- Falls die PRK-Methode
$$\begin{aligned} b_i \hat{a}_{ij} + \hat{b}_j a_{ji} &= b_i \hat{b}_j \qquad \forall\, i, j \\ b_i &= \hat{b}_i \qquad \forall\, i \end{aligned}$$
erfüllt, dann ist sie symplektisch.

  Beispiel: Symplektisches Euler-Verfahren; Störmer-Verlet Verfahren.