Zusammenfassung: Kapitel 6

- Wir betrachten das Problem
$$\begin{aligned} y'(x) &= f(y(x)), \\ y(0) &= y_0. \end{aligned}$$
Annahme. Die numerische Lösung lautet
$$\Phi_h(y) = y + hf(y) + h^2 d_2(y) + h^3 d_3(y) + \dots$$
mit gegebenen $d_j(y)$. Beispiel: Explizites Euler: $d_j(y) = 0 \quad \forall\, j \geq 2$.
Ansatz. Die *modifizierte Differentialgleichung* lautet
$$\begin{aligned} \tilde{y}' &= f_h(\tilde{y}) = f(\tilde{y}) + hf_2(\tilde{y}) + h^2 f_3(\tilde{y}) + \dots, \\ \tilde{y}(0) &= y_0. \end{aligned}$$
Wir verlangen nun, dass die exakte Lösung der modifizierten Differentialgleichung die numerische Lösung ist:
$$\Phi_h(y_0) = \tilde{y}(h).$$
Eine Taylor-Entwicklung liefert die Koeffizienten $f_j(y)$.

- Falls man das Verfahren als B-Reihe schreiben kann (dies gilt, z.B. für RK-Verfahren)
$$\Phi_h(y) = y + \sum_{t \in T} \frac{h^{\rho(t)}}{\rho(t)!} \alpha(t) a(t) F(t)(y),$$
dann kann man die modifizierte Differentialgleichung $h\tilde{y}' = B(b, \tilde{y})$ auch als B-Reihe darstellen mit Koeffizienten
$$b(\emptyset) = 0, b(\cdot) = 1, b(t) = a(t) - \sum_{j=2}^{\rho(t)} \frac{1}{j!} \big(\partial_b^{j-1} b\big)(t)$$
wobei $\partial_b^{j+1} b = \partial_b(\partial_b^j b)$.

- *Eigenschaften der modifizierten Differentialgleichung.*
Falls das Verfahren Ordnung p hat, dann gilt:
$$\begin{aligned} \tilde{y}' &= f_h(\tilde{y}) = f(\tilde{y}) + h^p f_{p+1}(\tilde{y}) + h^{p+1} f_{p+2}(\tilde{y}) + \dots, \\ \tilde{y}(0) &= y_0 \end{aligned}$$
wobei $f_{p+1}(\tilde{y})$ der Hauptkoeffizient des lokalen Fehlers ist.
Die Koeffizienten der modifizierten Differentialgleichung des adjungierten Verfahrens erfüllen
$$f_j^*(y) = (-1)^{j+1} f_j(y).$$

Die Koeffizienten der modifizierte Differentialgleichung eines symmetrischen Verfahrens erfüllen

$$f_j(y) = 0 \quad \text{für} \quad j \quad \text{gerade.}$$

Falls das Problem Hamiltonisch ist, $y' = J^{-1}\nabla H(y)$, und das Verfahren symplektisch, dann ist die modifizierte Differentialgleichung auch Hamiltonisch:

$$f_j(y) = J^{-1}\nabla H_j(y) \qquad \forall\, j \geq 2.$$

- *Fehleranalyse:*

  Annahme

$$\begin{aligned} \|f^{(k)}(y)\| &\leq k!MR^{-k} \quad \text{für} \quad k = 0, 1, 2, \ldots. \\ |a(t)| &\leq \gamma(t)\mu\kappa^{\rho(t)-1} \quad \forall\, t \in T. \end{aligned}$$

  Dann gilt:

$$\begin{aligned} \|d_j(y)\| &\leq \mu M\big(\frac{4\kappa M}{R}\big)^{j-1} \quad \text{für} \quad j \geq 2. \\ |b(t)| &\leq \ln(2)\nu^{\rho(t)}\rho(t)! \quad \text{mit} \quad \nu := \kappa + \frac{\mu}{2\ln(2)-1}. \\ \|f_j(y)\| &\leq 0.5\nu M\big(\frac{2\nu Mj}{\mathrm{e}R}\big)^{j-1} \quad \text{für} \quad j \geq 2. \\ \|\Phi_h(y_0) - \varphi_{N,h}(y_0)\| &\leq h\gamma M\mathrm{e}^{-h^*/h}. \end{aligned}$$

  Für ein Hamiltonisches Problem $\dot{y} = J^{-1}\nabla H(y)$ und ein symplektisches Verfahren der Ordnung p gilt:

$$\begin{aligned} \tilde{H}(y_n) &= \tilde{H}(y_0) + \mathcal{O}(\mathrm{e}^{-h^*/(2h)}) \quad \text{für} \quad nh \leq T \\ H(y_n) &= H(y_0) + \mathcal{O}(h^p) \quad \text{für} \quad nh \leq T \end{aligned}$$

  für exponentielle Langzeiten $T = \mathrm{e}^{h^*/(2h)}$.