Zusammenfassung: Kapitel 7

- Eine *Zufallsvariable* X ist eine messbare Abbildung von einem Wahrscheinlichkeitsraum Ω nach $\mathbb{R}$:
$$X : \Omega \to \mathbb{R}.$$
Man hat
$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u,$$
wobei f die *Dichtefunktion* von X ist. Der *Erwartungswert* von X ist definiert als
$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} u f(u)\,\mathrm{d}u.$$
Die *Varianz* von X lautet
$$\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2].$$
Wir sagen, dass zwei Zufallsvariablen X und Y *unabhängig* sind, falls
$$\mathbb{E}[g(X)h(Y)] = \mathbb{E}[g(X)]\mathbb{E}[h(Y)] \qquad \forall\, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$
Die Zufallsvariable X ist *normalverteilt*, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, falls
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \mathrm{e}^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

- Sei $\mathbb{T} \subset \mathbb{R}$ oder $\mathbb{Z}$ eine kontinuierliche, bzw. diskrete, Zeit. Eine Funktion $X : \mathbb{T} \times \Omega \to \mathbb{R}$ ist ein *stochastischer Prozess*, falls $X(t, \cdot)$ eine Zufallsvariable für alle $t \in \mathbb{T}$ ist. Notation $X(t) = X_t(\cdot) = X(t, \cdot)$.

- $W(t)$ ist eine *Brownsche Bewegung* oder ein *Standard Wiener-Prozess* auf $[0, T]$, falls
  1. $W(0) = 0$
  2. Für $0 \leq s \leq t \leq T$ gilt $W(t) - W(s) \sim N(0, t - s)$
  3. Für $0 \leq s \leq t \leq u \leq v \leq T$ sind $W(t) - W(s)$ und $W(v) - W(u)$ unabhängig.

  Dieser Prozess ist stetig, aber nicht differenzierbar.

- Für eine Zerlegung des Intervalls $[0, T]$ mit Schrittweite $t_{j+1} - t_j = \Delta t$ haben wir zwei Definitionen eines *stochastischen Integrals* gesehen.

  Das *Ito-Integral*
$$\int_0^T h(t)\,\mathrm{d}W(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_j h(t_j)(W(t_{j+1}) - W(t_j)).$$

Das *Stratonovitch-Integral*

$$\int_0^T h(t) \circ \mathrm{d}W(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_j h(\frac{t_j + t_{j+1}}{2})(W(t_{j+1}) - W(t_j)).$$

Eigenschaften des Ito-Integrals:

1. $\mathbb{E}[\int_0^T h(t)\, \mathrm{d}W(t)] = 0$
2. $\mathbb{E}[\big(\int_0^T g(t)\, \mathrm{d}W(t)\big)\big(\int_0^T h(t)\, \mathrm{d}W(t)\big)] = \mathbb{E}[\int_0^T g(t)h(t)\, \mathrm{d}t]$

- Seien f und g gegeben, der stochastische Prozess $X(t)$ erfüllt die *stochastische Differentialgleichung*

$$\begin{aligned} \mathrm{d}X(t) &= f(X(t))\mathrm{d}t + g(X(t))\mathrm{d}W(t) \\ X(0) &= X_0 \end{aligned}$$

wenn und nur wenn

$$X(t) - X(0) = \int_0^t f(X(s))\, \mathrm{d}s + \int_0^t g(X(s))\, \mathrm{d}W(s).$$

- Falls $X(t)$ eine Lösung von $\mathrm{d}X(t) = f(X(t))\mathrm{d}t + g(X(t))\mathrm{d}W(t)$ ist und $U : [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ glatt genug ist, dann ist $Y(t) := U(t, X(t))$ die Lösung von (*Ito-Formel*)

$$\begin{aligned} \mathrm{d}Y(t) &= \Big(\frac{\partial U}{\partial t}(t, X(t)) + f(X(t))\frac{\partial U}{\partial x}(t, X(t)) + \frac{1}{2}g^2(X(t))\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(t, X(t))\Big)\mathrm{d}t \\ &+ g(X(t))\frac{\partial U}{\partial x}(t, X(t))\mathrm{d}W(t). \end{aligned}$$

- Das *Euler-Maruyama-Verfahren* lautet

$$X_{n+1} = X_n + f(X_n)\Delta t + g(X_n)\Delta W_n,$$

wobei $\Delta W_n := W_{n+1} - W_n \sim N(0, \Delta t)$.
Dieses Verfahren *konvergiert stark mit der Ordnung* $p = 1/2$, d.h.

$$\sup_{0 \le t_n \le T} \mathbb{E}[|X_n - X(t_n)|] \le C\Delta t^{1/2}.$$

Dieses Verfahren *konvergiert schwach mit der Ordnung* $p = 1$, d.h.

$$\sup_{0 \le t_n \le T} |\mathbb{E}[\Phi(X_n)] - \mathbb{E}[\Phi(X(t_n))]| \le C\Delta t^1,$$

wobei Φ eine gegebene Funktion ist.