Serie 1

1.

- Formulieren Sie die gewöhnlichen Differentialgleichungen vierter Ordnung

$$y^{(4)} = -2ty^{(3)} + (y^{(2)})^3 + \sin(y^{(1)}) + \mathrm{e}^{-t},$$

mit Anfangsbedingungen $y(0) = y^{(1)}(0) = 1, y^{(2)}(0) = y^{(3)}(0) = 0$, als ein äquivalentes System erster Ordnung.

- Formen Sie das Problem

$$\left\{\begin{array}{rcl} \ddot{y}_1 &=& t^2 - \dot{y}_1 - y_2^2 \\ \ddot{y}_2 &=& t + \dot{y}_2 - y_1^3 \\ y_1(0) &=& 0, y_2(0) = 1, \dot{y}_1(0) = 1, \dot{y}_2(0) = 0 \end{array}\right.$$

in ein System erster Ordnung um.

2.

Falls $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$, D wie in der Vorlesung, differenzierbar nach y ist, dann ist f Lipschitz-stetig in D.

3. *

Zeigen Sie, dass $y_1(x) \equiv 0$, $y_2(x) \equiv (x-c)^2$ für $x \geq c$ (Null sonst) und $y_3(x) \equiv -(c-x)^2$ für $x \leq c$ (Null sonst) Lösungen der Gleichung

$$\left\{\begin{array}{rcl} y' &=& 2\sqrt{|y|} \\ y(0) &=& 0 \end{array}\right.$$

sind (man betracht das Problem auf einem Kompakt D). Das AWP hat dann unendlich viele Lösungen. Warum wiederspricht es nicht der Satz 2 aus der Vorlesung? Begründen Sie.

4.

Sei $f(x,y)$ gegeben bei

$$f(x,y) = \left\{\begin{array}{rll} 0 & \text{für} & x \leq 0 \\ 2x & \text{für} & x > 0, y < 0 \\ 2x - \dfrac{4y}{x} & \text{für} & 0 \leq y \leq x^2 \\ -2x & \text{für} & x > 0, x^2 < y. \end{array}\right.$$

Zeigen Sie, dass $f(x,y)$ stetig aber nicht Lipschitz-stetig in $(0,0)$ ist. Zeigen Sie dazu noch, dass $y(x) = x^2/3$ die einzige Lösung von $y' = f(x,y), y(0) = 0$ ist (man betracht das Problem auf einem Kompakt $D = \{(x,y) : 0 \leq x \leq x_{end}, |y| \leq b\}$).

5. (P)*

Wenden Sie das explizite Euler-Verfahren, um die Gleichung

$$\begin{cases} y' &= 2y \\ y(0) &= 1 \end{cases}$$

numerisch zu lösen. Plotten Sie die numerische und exakte Lösung auf $[0,2]$. Zeichnen Sie auf einer log-log-Skala den Absolutbetrag des Fehlers bei $x=1$ bezüglich $h=1/N$ auf. Benutzen Sie $N = 10 \cdot [2\ \ 4\ \ 8\ \ 16\ \ 32\ \ 64\ \ 128]$.

6. (P)

Das Räuber-Beute Modell. Sei $y_1(t)$ und $y_2(t)$ die Anzahl von Hasen, bzw. Luchsen, zum Zeitpunkt t. Die Dynamische beider Populationen ist modelliert durch das Problem

$$\begin{cases} \dot{y}_1 &= y_1(y_2-2) \\ \dot{y}_2 &= y_2(1-y_1). \end{cases}$$

Für $h=0.12$ und $y_1(0)=y_2(0)=2$, plotten Sie die Lösung (y_1 gegen y_2), die sich mit dem expliziten Euler-Verfahren auf das Zeit-Intervall $[0,10]$ ergibt. Die exakten Lösungen sind periodisch, was bekommen sie?

Hinweis: *Um zu zeigen, dass die Lösungen periodisch sind, dividieren Sie die erste Gleichung durch die andere. Und dann zeigen Sie, dass* $I(y_1,y_2) = \ln(y_1) - y_1 + 2\ln(y_2) - y_2$ *eine Invariante ist. D.h.* $\frac{d}{dt}I(y_1(t),y_2(t)) = 0$ *oder* $I(y_1(t),y_2(t)) = Konst.$ *für alle Zeit.*