Serie 2

1.

Wir betrachten das Problem $y' = f(x,y)$. Zeigen Sie, dass für das Verfahren $y_1 = y_0 + h\Phi(x_0, y_0, h)$, die Konsistenz ist äquivalent zur:

$$\lim_{h\to 0} \Phi(x_0, y_0, h) = f(x_0, y_0).$$

2. *

- Zeigen Sie, dass das Einschrittverfahren $y_1 = y_0 + h\Phi(x_0, y_0, h)$ mit

$$\Phi(x,y,h) := a_1 f(x,y) + a_2 f(x + b_1 h, y + b_2 h f(x,y))$$

konsistent von der Ordnung $p = 2$ ist, falls die Funktion

$$f : [x_0, x_{end}] \to \mathbb{R}$$

$2-$mal stetig partiell diffentierbar ist und $a_1 + a_2 = 1, a_2 b_1 = \frac{1}{2}$, und $a_2 b_2 = \frac{1}{2}$.

- Zeigen Sie, dass die Verfahren von Runge und von Heun die Ordnung $p = 2$ haben.

3.

Beweisen Sie das folgende Lemma aus der Vorlesung:
Wir betrachten ein s-stufiges RK-Verfahren. Falls f Lipschitz-stetig in y mit der Konstante L ist, dann ist $\Phi(x,y,h) := \sum_{i=1}^{s} b_i k_i(x,y,h)$ auch Lipschitz-stetig, d.h.

$$\|\Phi(x,y,h) - \Phi(x,z,h)\| \leq \Lambda \|y - z\| \text{ für alle } y, z \in \mathbb{R}^n,$$

wobei $\Lambda := L(\sum_{i=1}^{s} |b_i| + hL \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{i-1} |b_i a_{ij}| + \mathcal{O}(h^2))$.

4.

Zeigen Sie, dass ein s-stufiges RK-Verfahren

$$\begin{aligned} k_i &= f(x_0 + c_i h, y_0 + h \sum_{j=1}^{s} a_{ij} k_j) \text{ für } i = 1, \ldots, s, \\ y_1 &= y_0 + h \sum_{i=1}^{s} b_i k_i \end{aligned}$$

sich auch wie folgt schreiben lässt:

$$\begin{aligned} Y_i &= y_0 + h\sum_{j=1}^{s} a_{ij} f(x_0 + c_j h, Y_j) \text{ für } i = 1, \dots, s, \\ y_1 &= y_0 + h\sum_{i=1}^{s} b_i f(x_0 + c_i h, Y_i). \end{aligned}$$

5. (P)*

Wir betrachten

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = y(t) - 2\sin(t) & \text{für } t \in [0,5] \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

- Wie lautet die exakte Lösung?
  Hinweis: Lineare Kombination von $\sin(t)$ *und* $\cos(t)$.

- Wenden Sie das Verfahren von Euler, von Runge und von RK4, und plotten Sie auf einer **log-log**-Skala der Absolutbetragen der Fehler bei $x = 3$ bezüglich $h = 1/N$. Benutzen Sie hierbei $N = 10 \cdot [2\ 4\ 8\ 16\ 32\ 64\ 128]$.

6. (P)

Für ein System

$$\begin{aligned} \dot{u} &= a(u,v), \\ \dot{v} &= b(u,v), \end{aligned}$$

definieren wir das *symplektische Euler-Verfahren*

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + ha(u_n, v_{n+1}), \\ v_{n+1} &= v_n + hb(u_n, v_{n+1}). \end{aligned} \tag{1}$$

Wir betrachten nun das Räuber-Beute Modell (siehe Serie 1) und wenden das symplektische Verfahren (1) mit den Anfangswerten $y_1(0) = y_2(0) = 2$, $y_1(0) = 4$ und $y_2(0) = 2$, oder $y_1(0) = 6$ und $y_2(0) = 2$ mit $h = 0.12$. Plotten Sie die Lösung auf das Zeitintervall $[0, 10]$. Was betrachten Sie hier?
Hinweis: Für das implizite System in v_{n+1}, *benutzen Sie eine Fixpunktiteration.*