Serie 3

1. *

Zeigen Sie, dass die Ordnung eines s-stufiges explizites RK-Verfahren nicht grösser als s sein kann.

Hinweis: *Betrachten Sie das Problem* $y' = y$, $y(0) = 1$ *und schauen Sie, dass* y_1 *ein Polynom in* h *vom Grad* s *ist.*

2.

Geben Sie alle expliziten RK-Verfahren mit $p = s = 3$.

3.

Geben Sie alle Bäume mit Ordnung 5. Für einige Bäume, geben Sie zusätzlich die elementaren Differentiale $F(t)$ und die Koeffizienten $\alpha(t)$.

4. *

Für die Koeffizienten c und b eines 4-stufigen expliziten RK-Verfahren nehmen wir die Knoten bzw. Gewichte einer Simpson Quadratur-Formel. Diese besitzt nur 3 Knoten, so dass wir aus Symmetriegründen den mittleren verdoppeln:

$$c = (0, 1/2, 1/2, 1)^\top \text{ und } b = (1/6, 1/3, 1/3, 1/6)^\top.$$

Geben Sie die Koeffizienten a_{ij} so, dass das Verfahren Ordnung 4 hat.

5. (P)*

a) Für $H : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ definieren wir das *Hamiltonsche Problem* (für $k = 1, \ldots, d$):

$$\begin{cases} \dot{p}_k &= -\dfrac{\partial H}{\partial q_k}(p, q), \qquad (*) \\ \dot{q}_k &= \dfrac{\partial H}{\partial p_k}(p, q). \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $H(p(t), q(t)) = \text{Const.}$ für $(p(t), q(t))$ eine Lösung von $(*)$.

b) Für $H(p, q) = \frac{1}{2}p^2 - \cos(q)$, geben Sie die Gleichung $(*)$. Haben Sie diese Gleichung schon gesehen?

c) Integrieren Sie das Problem in b) mit AW $(p_0, q_0) = (0, 0.5)$ mit Euler, Runge, symp. Euler bzgl. $h = 0.2$ und im Zeitintervall $t \in [0, 15]$.

d) Für ein System

$$\begin{cases} \dot{p} & = & f(q) \\ \dot{q} & = & p \end{cases}$$

definieren wir das *Störmer-Verlet Verfahren*:

$$\begin{aligned} p_{n+1/2} &= p_n + \frac{h}{2} f(q_n), \\ q_{n+1} &= q_n + h p_{n+1/2}, \\ p_{n+1} &= p_{n+1/2} + \frac{h}{2} f(q_{n+1}) \end{aligned}$$

mit der Aufdatierung bzgl. 1-Schrittverfahren $(p_n, q_n) \to (p_{n+1}, q_{n+1})$.

Benutzen Sie das Störmer-Verlet Verfahren, um das selbe Problem mit $h = 0.6$ numerisch zu lösen.