Serie 5

1. *

Um zu dem AWP

$$y'(x) = f(x, y(x)),\ y(x_0) = y_0$$

einen Schritt des impliziten Mehrschrittverfahrens

$$y_{n+1} = \eta_n + h\beta f(x_{n+1}, y_{n+1})$$

auszufüllen, muss eine implizite Gleichung gelöst werden. Zeigen Sie, dass für h klein genug eine eindeutige Lösung y_{n+1} in der Nähe von y_n existiert, falls f Lipschitz-stetig in der Variablen y ist (mit Konstante L).

2.

Zeigen Sie, dass

$$\delta^j f[x_n, x_{n-1}, \cdots, x_{n-j}] = \frac{\nabla^j f_n}{j!\, h^j}$$

für die dividierten Differenzen $\delta^j f$ und $\nabla^j f_n = \nabla^{j-1} f_n - \nabla^{j-1} f_{n-1}$, $\nabla^0 f_n = f_n$.

3.

Zeigen Sie, dass

$$\gamma_j = \int_0^1 \binom{s+j-1}{j}\, \mathrm{d}s$$

und berechnen Sie γ_j für $j = 0, 1, 2, 3$.

4. *

Wir betrachten die Gleichung

$$y(x_{n+2}) - y(x_{n+1}) = \int_{x_{n+1}}^{x_{n+2}} y'(x)\, \mathrm{d}x.$$

Geben Sie die 2-Schrittverfahren von Adams-Bashforth und Adams-Moulton ($y_{n+1} = y_n + h \sum_{j=0}^{2} \gamma_j^* \nabla^j f_{n+1}$). Geben Sie alle Details.

5. (P)

Sei das Problem $y' = y^2$, $y(0) = 1$ auf $0 \le x \le 0.9$ mit den exakten Anfangswerten $y_i = \dfrac{1}{1 - x_i}$ für $i = 0, 1, \ldots, k-1$. Benutzen Sie das Verfahren von Adams-Bashforth ($k = 1, 2, 3$) und studieren Sie $y(x_k) - y_k$ für kleine Schrittweiten mit `loglog`-Skala.

6. (P)*

Wir betrachten das Problem

$$\dot{y}(t) = \lambda(y - \sin(t)) + \cos(t), \;\; y(0) = 1, \;\; 0 \leq t \leq 3$$

mit der exakten Lösung $y(t) = \exp(\lambda t) + \sin(t)$. Schreiben Sie eine Matlab-Funktion `[t,y] = AB4(t0,T,y0,h,lambda)`, die eine Nährung der exakten Lösung $y(t)$ auf dem Intervall $[t_0, T]$ mit dem Adams-Bashforth-Verfahren für $k = 4$ und konstanter Schrittweite h berechnet.

(a) Benutzen Sie die exakte Lösung, um die Anfangswerten zu bestimmen.

(b) Benutzen Sie das *klassische* Runge-Kutta-Verfahren der Ordnung 4 (siehe die Serie 4) um die Anfangswerten zu bestimmen.

(c) Für jeden Wahl von Anfangswerten ((a) und (b)) mit $\lambda = 1$ zeichnen Sie auf einer `loglog`-Skala den Fehler bei $T = 3$ bezüglich h auf. Hierbei benutzen Sie z.B. $h = 1/2, 1/20, 1/200$.

(d) Für $h = 0.01$ studieren Sie die Lösungen für $\lambda = 10, -10, -500$.

Hinweis: Die Struktur des Matlab-Programms könnte z.B. so aussehen:

```
function [t,y] = AB4(t0,T,y0,h,lambda)
nb_steps=(T-t0)/h;

% Startwerte mit exakter Lösung
...
% Startwerte mit RK4:
% Berechne y(1:4,:) und t(1:4), t(1) = t_0
[t,y] = RK4( ... );

% Speichere die alten Werten von f
f1 = f(t(1),y(1,:),lambda);f2 = ...;f3 = ...

%4-Schritt Adams-Bashforth-Verfahren
for n = 4:nb_steps
    f4 = f(t(n),y(n,:),lambda);
    y(n+1,:) = y(n,:)+ ...
    t(n+1) = ...

    %modifiziere  die Werte von f,  n -> n-1
    f1 = f2;
    f2 = ...
    f3 = ...
end
```