Serie 6

1. *

Zeigen Sie (siehe Vorlesung), dass ein lineares k-Schrittverfahren Ordnung p hat, genau dann, wenn

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i = 0 \text{ und } \sum_{i=0}^{k} \alpha_i i^q = q \sum_{i=0}^{k} \beta_i i^{q-1}, \; q = 1, ..., p.$$

2.

Zeigen Sie, dass das *Verfahren von Milne*

$$y_{n+1} = y_{n-1} + \frac{h}{3} \left(f_{n+1} + 4 f_n + f_{n-1} \right)$$

Ordnung $p = 4$ hat. Erklären Sie, warum die Koeffizienten gleich den Koeffizienten der Simpson-Quadraturformel sind.

3. *

Überprüfen Sie, dass das k-Schritt-BDF-Verfahren Ordnung $p = k$ hat.

Hinweis: Betrachten Sie das Problem $y' = f(x)$ mit $f(x) = qx^{q-1}$ für $q = 1, \ldots, p$ um zu zeigen, dass das Verfahren Ordnung $p \geq k$ hat. Benutzen Sie das Polynom $g(x)$ vom Grad $\leq k$ mit $g(x_i) = y_i$ für $i = 0, \ldots, k$.

Um zu zeigen, dass $p = k$ ist, betrachten Sie $f(x) = (k + 1)x^k$ und finden Sie einen Widerspruch.

4.

Zeigen Sie, dass die Trapez-Regel

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} \left(f(x_{n+1}, y_{n+1}) + f(x_n, y_n) \right)$$

einem halben Schritt mit dem expliziten Euler-Verfahren, gefolgt von einem halben Schritt mit dem impliziten Euler-Vefahren, entspricht.

5. (P)

Betrachten Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y'(x) &= \mathrm{e}^{y(x)} \sin(x), \quad 0 \leq x \leq 10, \\ y(0) &= -\ln(3). \end{aligned}$$

Schreiben Sie eine Matlab-Funktion `[t,y]=ABAM3(t0,T,y0,h)`, um dieses Problem numerisch mit dem folgenden einfachen Prädiktor-Korrektor-Verfahren zu lösen: Der Prädiktor wird mit Adams-Bashforth 3. Ordnung ($k = 3$) berechnet und für einen Korrekturschritt mit dem Adams-Moulton-Verfahren 3. Ordnung ($k = 2$) eingesetzt.

Zeichnen Sie den Fehler in $x = 10$ gegen die Schrittweite h in einem log-log-Plot. Verwenden Sie $h = 1,\ 1/2,\ 1/5,\ 1/10,\ 1/20,\ 1/50,\ 1/100$.

Hinweis: *Die exakte Lösung ist* $y(x) = -\ln(\cos(x) + 2)$.

6. (P)*

Betrachten Sie das selbe Problem wie in Aufgabe 5. Schreiben Sie eine Matlab-Funktion `[t,y]=BDF2(t0,T,y0,h)`, um das Problem mit dem 2-Schritt-BDF-Verfahren zu lösen. Lösen Sie die implizite Gleichung mit einer Fixpunktiteration (`tol` $= 10^{-11}$), wobei der Startwert jeweils mit einem Schritt des expliziten Euler-Verfahrens berechnet wird.

Zeichnen Sie in einem log-log-Plot den Absolutbetrag des Fehlers gegen $h = 1/2,\ 1/5,\ 1/10,\ 1/20,\ 1/50,\ 1/100,\ 1/200,\ 1/500$ und erstellen Sie eine Tabelle mit der durchschnittlichen Anzahl Fixpunktiterationen für jedes h. Welche Ordnung hat diese Verfahren?

Hinweis: *Die Struktur des Matlab-Programms könnte z.B. so aussehen:*

```
function [t,y] = BDF2(t0,T,y0,h)
nb_steps = (T-t0)/h;
t(1) = ...; t(2) = ...;
y(1) = ...; y(2) = ...;
count = 0;    % Zähler
for n = 2:nb_steps
    f1 = ...;
    y_it = ...;      % Startwert für y(n+1)
    t(n+1) = ...;
    RHS = ...;    % rechte Seite im Verfahren
    while abs(y_it - RHS) >= tol
        y_it = RHS;
        RHS = ...;
        count = count + 1;
    end
    y(n+1) = y_it;
end
average = count/nb_steps    % Durchschnitt ausgeben
```