Serie 7

1. (P/2)*

Suchen Sie ein Mehrschrittverfahren der Gestalt

$$y_{n+2} + \alpha_1 y_{n+1} + \alpha_0 y_n = h\left(\beta_1 f_{n+1} + \beta_0 f_n\right)$$

mit maximaler Ordnung. Wenden Sie das Verfahren auf $y' = y,\ y(0) = 1$ an mit $h = 0.1,\ 0.025$.

2.

Vervollständigen Sie den Beweis des Satzes über die allgemeine Lösungsformel der Differenzengleichung k-ter Ordnung ($\alpha_k = 1$):

$$(*)\quad \sum_{i=0}^{k} \alpha_i y_{n+i} = 0 \text{ für } n = 0, 1, \ldots .$$

Hinweis: Schreiben Sie $(*)$ *als Differenzengleichung erster Ordnung,* $z_n = (y_n, y_{n+1}, \ldots, y_{n+k-1})^T,\ z_n = Az_{n-1}$, *also* $z_n = A^n z_0$. *A ist die Begleitmatrix des charakteristischen Polynoms* $\rho(\zeta) = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i \zeta^i$. *Zerlegen Sie A in Jordan-Block-Form. Sei J ein $s \times s$ Jordan-Block von A*

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die allgemeine Form von J^n. Schreiben Sie dazu

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & & & & \\ & \lambda & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda & \\ & & & & \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass die Matrix J^n die Form $p(n)\lambda^n$ hat, wobei $p(n)$ ein Polynom mit Koeffizienten in $\mathbb{R}^{s\times s}$ vom Grad $\leq s-1$ ist.

3.

Berechnen Sie die allgemeine Lösung von

$$y_{n+3} - 5y_{n+2} + 8y_{n+1} - 4y_n = 0$$

und finden Sie eine partikuläre Lösung mit $y_0 = -1,\ y_1 = 0,\ y_2 = 4$.

4. (P/2)*

Zeigen Sie mit Hilfe von Matlab, dass das k-Schritt-BDF-Verfahren stabil ist für $k = 1, 2, \ldots, 6$ und instabil für $k = 7$.

Hinweis: Zeigen Sie, dass das Polynom $\rho(\zeta)$ folgende Gleichung erfüllt:

$$\rho(\zeta) = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j}\zeta^{k-j}(\zeta - 1)^j.$$

Benutzen Sie die Transformation $\zeta = \dfrac{1}{1-z}$ und berechnen Sie mit dem Matlab-Befehl `roots` *die Wurzeln von $p(z) = \sum_{j=1}^{k} \dfrac{1}{j} z^j$.*

5.

Zeigen sie, dass das Verfahren (mit $b \neq 0$)

$$y_{n+3} + (2b - 3)(y_{n+2} - y_{n+1}) - y_n = hb(f_{n+2} + f_{n+1})$$

genau dann stabil ist, wenn $b \in\ ]0, 2[$.

6. (P)

Betrachtet wird das Problem

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} v \\ \dfrac{v(v-1)}{u} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u(0) \\ v(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad x \in [0, 1],$$

mit der exakten Lösung

$$\begin{pmatrix} u(x) \\ v(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1 + 3\mathrm{e}^{-8x}}{8} \\ -3\mathrm{e}^{-8x} \end{pmatrix}.$$

Implementieren Sie die folgenden Verfahren und erstellen Sie eine Tabelle mit dem Fehler am Ende des Intervalls $[0, 1]$ für $h = 0.1,\ 0.05,\ 0.025,\ 0.0125$.

Verfahren 1: $y_{n+2} - y_{n+1} = \dfrac{h}{3}(3f_{n+1} - 2f_n)$

Verfahren 2: $y_{n+3} + \dfrac{1}{4}y_{n+2} - \dfrac{1}{2}y_{n+1} - \dfrac{3}{4}y_n = \dfrac{h}{8}(19f_{n+2} + 5f_n)$

Verfahren 3: $y_{n+2} + y_{n+1} - 2y_n = \dfrac{h}{4}(f_{n+2} + 8f_{n+1} + 3f_n)$

Zeigen Sie jeweils zusätzlich, ob das Verfahren stabil und konsistent ist.

Hinweis: Die Startwerte werden mit der exakten Lösung berechnet.