Serie 8

1. *

Zeigen Sie, dass die Verfahren von Adams-Bashforth die Ordnung $p = k$ haben.

Hinweis: Siehe die Aufgaben 1 *und* 3 *in der Serie* 6.

2.

Beweisen Sie das Lemma 2 aus der Vorlesung :
Wenn das LMV stabil ist, dann gibt es eine Norm auf $\mathbb{R}^k$ so, dass $\|A\| \leq 1$.

Hinweis: Falls λ eine Wurzel von $\rho(\zeta)$ ist, dann ist der Vektor $(1, \lambda, \ldots, \lambda^{k-1})$ ein Eigenvektor der Matrix A mit dem Eigenwert λ. Damit erfüllen die Eigenwerte von A die Stabilitätsbedingung mit Wurzeln (siehe Vorlesung). Hier formulieren Sie die Jordansche Normalform, $J := T^{-1}AT$. Dabei schätzen Sie die rechte Nebendiagonale der Diagonalblöcke in J ab. Schliesslich finden Sie die Ungleichung $\|Ax\| \leq \|x\|$ mit der Maximumnorm, $\|\cdot\|_\infty$.

3.

Beweisen Sie das Korollar aus der Vorlesung :
Falls das LMV die Ordnung p hat und die Startwerte mit $\mathcal{O}(h^q)$ konvergieren, dann ist der globale Fehler $\mathcal{O}(h^{\min\{p,q\}})$.

4. (P*)

Wir betrachten die Gleichung

$$\begin{aligned} y' &= -50(y - \cos(x)) \quad (*) \\ y(0) &= 0.15. \end{aligned}$$

a) Geben Sie die exakte Lösung.

b) Wenden Sie das explizite Euler-Verfahren mit $h = 1.95/50$, die Mittelpunktsregel mit $h = 0.25$ und das implizite Euler-Verfahren mit $h = 0.5$ auf $(*)$ an.

c) Wie klein muss die Schrittweite h für das explizite Euler-Verfahren sein, damit die numerische Lösung nicht explodiert?