Serie 9

1. (P/2*)

Wenden Sie die Trapez-Regel auf das AWP (siehe Vorlesung)

$$\dot{y}(t) = \begin{pmatrix} -10 & 6 \\ 13.5 & -10 \end{pmatrix} y(t), y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

an und leiten Sie die numerische Lösung

$$y_n = c_1 \Big(\frac{1 - \frac{h}{2}}{1 + \frac{h}{2}} \Big)^n \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2 \Big(\frac{1 - \frac{19h}{2}}{1 + \frac{19h}{2}} \Big)^n \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

her. Schreiben Sie einen Matlab Code um dieses Problem zu lösen.

2.

Mit Hilfe der Taylor-Entwicklung zeigen Sie, dass die Approximation von $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t)$ für $x_j = j\Delta x$

$$\frac{u(x_{j+1}, t) - 2u(x_j, t) + u(x_{j-1}, t)}{(\Delta x)^2}$$

2. Ordnung hat.

3. *

Beweisen Sie das Theorem: Wir betrachten $\dot{y} = Ay$ mit einer $n \times n$ Matrix A mit den Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$

a) $\dot{y} = Ay$ ist stabil, genau dann wenn
(i) Re $\lambda_i \leq 0 \; \forall \, i$
(ii) Re $\lambda_i < 0$, falls dim (Jordan-Block zu λ_i) > 1.

b) $\dot{y} = Ay$ ist asymptotisch stabil, genau dann wenn
Re $(\lambda_i) < 0 \; \forall \, i$.

Hinweis: *Benutzen Sie die Transformation $y = Tz$ und lösen Sie das System für z.*

4.

a) Zeigen Sie, dass die Lösung $y(t,0,y_0) = y_0/(1-y_0x)$ der Gleichung $\dot{y} = y^2$ asymptotisch stabil für $y_0 < 0$ ist aber instabil für $y_0 = 0$.

b) Wir betrachten das Problem $\dot{y} = A(t)y$, $A(t) = T(t)^{-1}BT(t)$ mit

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \; T(t) = \begin{pmatrix} \cos(at) & -\sin(at) \\ \sin(at) & \cos(at) \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerten von $A(t)$ sind reell und negativ ($\lambda_1 = \lambda_2 = -1$). Bestimmen Sie den Parameter a in der Matrix $T(t)$ so, dass das Problem instabil ist.

Hinweis: Die Transformation $z(t) = T(t)y(t)$ ist hilfreich.

5. (P)

Wir betrachten das *Oregonator-Problem*
(siehe *http://www.scholarpedia.org/article/Oregonator*):

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= 77.27\big(y_2 + y_1(1 - 8.375 \cdot 10^{-6} y_1 - y_2)\big) && (1) \\ \dot{y}_2 &= \frac{1}{77.27}\big(y_3 - (1+y_1)y_2\big) && (2) \\ \dot{y}_3 &= 0.161(y_1 - y_3) && (3) \end{aligned}$$

mit Anfangswerten $y_1(0) = 1, y_2(0) = 2, y_3(0) = 3$. Um dieses schwierige Problem numerisch zu lösen benutzen wir die sogenannten *s-stufigen-Rosenbrock-Verfahren.* Für das Problem $y' = f(y)$ sind diese impliziten Verfahren gegeben durch

$$\begin{aligned} k_i &= hf\Big(y_0 + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} k_j\Big) + hJ \sum_{j=1}^{s} \gamma_{ij} k_j, \;\; i = 1, \dots, s && (4) \\ y_1 &= y_0 + \sum_{j=1}^{s} b_j k_j, && (5) \end{aligned}$$

wobei $\alpha_{ij}, \gamma_{ij}, b_i$ gegebene Koeffizienten sind und $J = f'(y_0)$. Wir werden wieder eine eingebette Strategie (siehe Serie 4) benutzen. Wir betrachten im folgenden das 2. Ordnung Verfahren mit

$$\begin{aligned} (\alpha_{ij}) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; (\gamma_{ij}) = \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2}/2 & 0 & 0 \\ -1 & 1-\sqrt{2}/2 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & -2+3\sqrt{2}/2 & 1-\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}, \\ (b_i) &= \big(1/2 \;\; 0 \;\; 1/2\big) \end{aligned}$$

und für das eingebettete Verfahren erster Ordnung

$$(\hat{b}_i) = \big(9/20 \;\; -\sqrt{2}/20 \;\; (11+\sqrt{2})/20\big).$$

Plotten Sie jede Koordinate der Lösung für $t \in [0, 450]$. Plotten Sie dazu die Koordinate y_2 gegen y_3 und y_1 gegen y_3.

Hinweis: *Die Struktur des Matlab-Programms könnte z. B. so aussehen:*

```
%fOreg.m: Funktion fï¿½r Oregonator
function f=fOreg(y)
fc1=77.27*(y(2)+y(1)*(1-8.375e-6*y(1)-y(2)));
fc2=(y(3)-(1+y(1))*y(2))/77.27;
fc3=0.161*(y(1)-y(3));
f=[fc1;fc2;fc3];
%jacOreg.m: Jacobi-matrix fï¿½r Oregonator
function J=jacOreg(y);
alpha=77.27;beta=-8.375e-6;gamma=0.161;
J=[alpha*(1+2*beta*y(1)-y(2)) alpha*(1-y(1)) 0; ...
-y(2)/alpha -(1+y(2))/alpha 1/alpha; ...
gamma 0 -gamma];
% main.m: eingebettes Rosenbrock-Verfahren
t0=0;tEnd=450;h=0.1;tol=1e-4;y0=[1;2;3];
% Parameter fï¿½r Rosenbrock
gamma=1-sqrt(2)/2;
% Datei fï¿½r Plots
...
y=y0;

while t0<tEnd,
t0=t0+h;
% Jacobi Matrix
J=jacOreg(y);
% Rosenbrock Verfahren
M=eye(3)-h*gamma*J;
[L,U]=lu(M); % LU-Zerlegung
f=fOreg(y);
tempo=L\f;
k1=U\tempo;
y1=y+h*k1;
% Stufen 2 und 3
k2=...;k3=...;
% Rosenbrock-Verfahren
yRB1=...;yRB2=...;
errest=max(abs(yRB1-yRB2)./(1+abs(y)));
hopt=h*min([5 max([0.2 0.9*sqrt(tol/errest)])]);
...
end
% Plots
...
```