

## Serie 10

### 1. \*

a) Sei  $\sigma(\zeta) = \zeta^2$ . Finden Sie ein  $\rho(\zeta)$  so, dass das 2-Schrittverfahren Ordnung  $p = 2$  hat.

b) Konvergiert dieses Verfahren?

c) Wenden Sie dieses Verfahren auf  $\dot{y} = \lambda y$ ,  $y(0) = 1$  an mit  $\lambda < 0$ . Zeigen Sie, dass das Verfahren A-stabil ist  $\forall h > 0$ .

### 2. (P/2)\*

Zeigen Sie die folgenden Behauptungen:

a) Für ein explizites RK-Verfahren der Ordnung  $p$  gilt:

$$R(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^p}{p!} + \mathcal{O}(z^{p+1}).$$

b) Falls  $p = s$ , dann gilt für ein explizites RK-Verfahren:

$$R(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^s}{s!}.$$

Zeichnen Sie das Stabilitätsgebiet für  $s = 1, 2, 3$ .

Hinweis: Der Matlab-Befehl `EZPLOT` kann helfen...

c) Ein explizites RK-Verfahren kann nicht A-stabil sein.

### 3. \*

Wir betrachten  $\dot{y} = Ay$  und  $y_{n+1} = R(hA)y_n$ . Wir nehmen an, dass  $|R(z)| \leq 1$  für  $\operatorname{Re} z \leq 0$ , d.h.  $R(z)$  ist A-stabil. Zeigen Sie:

a) Falls  $\dot{y} = Ay$  stabil ist, dann ist  $y_n$  beschränkt.

b) Falls  $\dot{y} = Ay$  asymptotisch stabil ist, dann  $y_n \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ .

Hinweis: Betrachten Sie die Jordan-Zerlegung von  $A$ .

4.

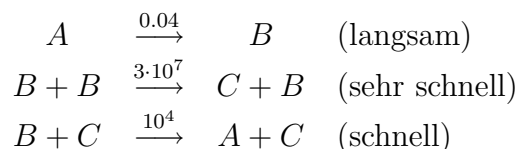
Wir betrachten das Pendel mit Reibungskoeffizient  $c$  :

$$\ddot{\alpha} + c\dot{\alpha} + \sin(\alpha) = 0.$$

Führen Sie die Geschwindigkeit  $v = \dot{\alpha}$  ein und geben Sie das System an. Finden Sie die Gleichgewichtszustände und zeigen Sie, ob sie für einen kleinen Reibungskoeffizienten  $c$  asymptotisch stabil sind oder nicht.

5. (P)

Betrachten Sie die drei gekoppelten chemischen Reaktionen (Robertson, 1966):



Dieses Problem führt auf die Differentialgleichungen

$$\begin{array}{ll} y_1' &= -0.04y_1 + 10^4y_2y_3, & y_1(0) &= 1 \\ y_2' &= 0.04y_1 - 10^4y_2y_3 - 3 \cdot 10^7y_2^2, & y_2(0) &= 0 \\ y_3' &= 3 \cdot 10^7y_2^2, & y_3(0) &= 0. \end{array}$$

Verwenden Sie zur numerischen Lösung

a) das explizite Euler-Verfahren,

b) das Adams-Moulton-Verfahren mit  $k = 2$ . Benutzen Sie in jedem Zeitschritt ein Newton-Verfahren.

Um die anfänglich rasante Veränderung von  $y_2$  genau zu simulieren, benutzen Sie bis  $t = 0.02$  einen kleinen Zeitschritt,  $h = 10^{-4}$ . Ab  $t = 0.02$  benutzen Sie für a)  $h = 0.01, 0.001, 0.0005$ , und für b)  $h = 0.04$ . Zeichnen Sie jeweils  $y_2$  für  $0 \leq t \leq 0.3$ .

Erklären Sie das unterschiedliche Verhalten der verschiedenen numerischen Lösungen anhand der Eigenwerte der Jacobimatrix bei  $t = 0.02$ .

Zeigen Sie, dass  $\sum_{i=1}^3 y_i(t) = 1$  für  $0 \leq t \leq 0.3$ . Finden Sie den Gleichgewichtszustand.