Serie 10

1. *

a) Sei $\sigma(\zeta) = \zeta^2$. Finden Sie ein $\rho(\zeta)$ so, dass das 2-Schrittverfahren Ordnung $p = 2$ hat.

b) Konvergiert dieses Verfahren?

c) Wenden Sie dieses Verfahren auf $\dot{y} = \lambda y, \; y(0) = 1$ an mit $\lambda < 0$. Zeigen Sie, dass das Verfahren A-stabil ist $\forall \; h > 0$.

2. (P/2)*

Zeigen Sie die folgenden Behauptungen:

a) Für ein explizites RK-Verfahren der Ordnung p gilt:

$$R(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^p}{p!} + \mathcal{O}(z^{p+1}).$$

b) Falls $p = s$, dann gilt für ein explizites RK-Verfahren:

$$R(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^s}{s!}.$$

Zeichnen Sie das Stabilitätsgebiet für $s = 1, 2, 3$.
Hinweis: Der Matlab-Befehl EZPLOT *kann helfen...*
c) Ein explizites RK-Verfahren kann nicht A-stabil sein.

3. *

Wir betrachten $\dot{y} = Ay$ und $y_{n+1} = R(hA)y_n$. Wir nehmen an, dass $|R(z)| \leq 1$ für $\mathrm{Re}\, z \leq 0$, d.h. $R(z)$ ist A-stabil. Zeigen Sie:

a) Falls $\dot{y} = Ay$ stabil ist, dann ist y_n beschränkt.

b) Falls $\dot{y} = Ay$ asymptotisch stabil ist, dann $y_n \to 0$ für $n \to \infty$.

Hinweis: Betrachten Sie die Jordan-Zerlegung von A.

4.

Wir betrachten das Pendel mit Reibungskoeffizient c :

$$\ddot{\alpha} + c\dot{\alpha} + \sin(\alpha) = 0.$$

Führen Sie die Geschwindigkeit $v = \dot{\alpha}$ ein und geben Sie das System an. Finden Sie die Gleichgewichtszustände und zeigen Sie, ob sie für einen kleinen Reibungskoeffizienten c asymptotisch stabil sind oder nicht.

5. (P)

Betrachten Sie die drei gekoppelten chemischen Reaktionen (Robertson, 1966):

$$\begin{array}{cccl} A & \xrightarrow{0.04} & B & \text{(langsam)} \\ B+B & \xrightarrow{3\cdot 10^7} & C+B & \text{(sehr schnell)} \\ B+C & \xrightarrow{10^4} & A+C & \text{(schnell)} \end{array}$$

Dieses Problem führt auf die Differentialgleichungen

$$\begin{array}{rcll} y_1' & = & -0.04y_1 + 10^4 y_2 y_3, & y_1(0) = 1 \\ y_2' & = & 0.04y_1 - 10^4 y_2 y_3 - 3\cdot 10^7 y_2^2, & y_2(0) = 0 \\ y_3' & = & 3\cdot 10^7 y_2^2, & y_3(0) = 0. \end{array}$$

Verwenden Sie zur numerischen Lösung

a) das explizite Euler-Verfahren,

b) das Adams-Moulton-Verfahren mit $k = 2$. Benutzen Sie in jedem Zeitschritt ein Newton-Verfahren.

Um die anfänglich rasante Veränderung von y_2 genau zu simulieren, benutzen Sie bis $t = 0.02$ einen kleinen Zeitschritt, $h = 10^{-4}$. Ab $t = 0.02$ benutzen Sie für $a)$ $h = 0.01,\ 0.001,\ 0.0005$, und für $b)$ $h = 0.04$. Zeichnen Sie jeweils y_2 für $0 \leq t \leq 0.3$.

Erklären Sie das unterschiedliche Verhalten der verschiedenen numerischen Lösungen anhand der Eigenwerte der Jacobimatrix bei $t = 0.02$.

Zeigen Sie, dass $\sum_{i=1}^{3} y_i(t) = 1$ für $0 \leq t \leq 0.3$. Finden Sie den Gleichgewichtszustand.