Serie 11

1.

Sei $f(x,y)$ Lipschitz-stetig mit Konstante L. Zeigen Sie, dass für h klein genug das nichtlineare Gleichungssystem

$$k_i = f(x_0 + c_i h, y_0 + h \sum_{j=1}^{s} a_{ij} k_j),\ i = 1, \ldots, s$$

eine eindeutige Lösung hat.

2. *

Wir betrachten ein AM-Verfahren $y_{n+1} - y_n = h \sum_{j=0}^{k} \gamma_j^* \nabla^j f_{n+1}$. Zeigen Sie, dass

a) $\gamma_j^* < 0$ für $j \geq 1$

Hinweis: $\gamma_j^* = (-1)^j \int_0^1 \binom{1-s}{j} \mathrm{d}s$

b) $\sum_{j=0}^{k} \gamma_j^* > 0$ für $k \geq 2$

Hinweis: Betrachten Sie $\sum_{j \geq 0} \gamma_j^* t^j$

c) $\sum_{j=0}^{k} \gamma_j^* 2^j < 0$ für $k \geq 2$.

3.

Betrachten Sie ein Kollokationsverfahren mit Stützstellen $c_1, \ldots, c_s$ und $M(x) = \frac{1}{s!} \prod_{i=1}^{s} (x - c_i)$. Beweisen Sie, dass die Stabilitätsfunktion gegeben ist durch

$$R(z) = \frac{M^{(s)}(1) + zM^{(s-1)}(1) + \ldots + z^s M(1)}{M^{(s)}(0) + zM^{(s-1)}(0) + \ldots + z^s M(0)}.$$

4.

Sei $M(x)$ ein Polynom vom Grad s so, dass $M^{(s)}(x) = 1$. Dann erfüllt $R(z)$ aus Aufgabe 3:

$$\mathrm{e}^z - R(z) = Cz^{s+1} + \mathcal{O}(z^{s+2}) \ \text{ mit } C = \int_0^1 M(x)\mathrm{d}x.$$

5. (P)*

Bestimmen und plotten Sie die Stabilitätsgebiete der folgenden Mehrschrittverfahren:

a) $3y_{n+1} - 3y_n = h(7f_{n+1} - 2f_n + f_{n-1})$

b) $y_{n+2} - \frac{4}{3}y_{n+1} + \frac{1}{3}y_n = \frac{2h}{3}f_{n+2}$

c) $y_{n+3} + \frac{1}{4}y_{n+2} - \frac{1}{2}y_{n+1} - \frac{3}{4}y_n = \frac{h}{8}(19f_{n+2} + 5f_n)$

d) $y_{n+1} - y_n = \frac{h}{2}(f_{n+1} + f_n)$.