Serie 12

1. *

Beweisen Sie den Satz aus der Vorlesung:
Ein Kollokationsverfahren mit den Stützstellen $c_1, \ldots, c_s$ (mit $0 \leq c_1 < c_2 < \ldots < c_s \leq 1$) ist ein s-stufiges RK-Verfahren mit

$$a_{ij} = \int_0^{c_i} \ell_j(\tau)\mathrm{d}\tau \text{ und } b_i = \int_0^1 \ell_j(\tau)\mathrm{d}\tau, \;\; 1 \leq i, j \leq s$$

wobei

$$\ell_j(\tau) = \prod_{i \neq j} \frac{\tau - c_i}{c_j - c_i}$$

das Lagrange-Polynom vom Grad $s-1$ ist.

2.

Zeigen Sie, dass eine rationale Funktion $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ mit $P, Q \in \mathbb{R}[z]$ (reelles Polynom) ist A-stabil $\Longleftrightarrow$

1) $|R(iy)| \leq 1$ für $y \in \mathbb{R}$

2) $R(z)$ hat keinen Pol in $\mathbb{C}^-$.

Hinweis: Nehmen Sie an, dass die Funktion $R(z)$ ihr Maximum auf dem Rand hat (folgt aus dem Maximumsprinzip).

3.

Wir definieren $R(z)$ wie in der Aufgabe 2. Man hat

$$|R(iy)| \leq 1 \Longleftrightarrow E(y) := |Q(iy)|^2 - |P(iy)|^2 \geq 0 \; \forall y. \qquad (*)$$

Zeigen Sie

1) $E(y)$ ist ein reelles Polynom vom Grad $\leq 2 \cdot \max(\deg(P), \deg(Q))$.

2) $E(y)$ ist gerade.

3) $E(y) = \mathcal{O}(y^{p+1})$ für $y \to 0$, falls $R(z) = \mathrm{e}^z + \mathcal{O}(z^{p+1})$.

4.

Zeigen Sie, dass das RK-Verfahren

$$\begin{array}{c|cc} \gamma & \gamma & 0 \\ 1-\gamma & 1-2\gamma & \gamma \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

A-stabil ist $\Longleftrightarrow \gamma \geq 1/4$.

Hinweis: Benutzen Sie die Aufgaben $2, 3$ *und* $p \geq s = 2$. *Dabei bestimmen Sie zunächst die Stabilitätsfunktion* $R(z)$. *Dann finden Sie einen Pol, der der zweiten Bedingung in der Aufgabe* 2 *genügen soll. Schliesslich bestimmen Sie* γ *mit der esten Bedingung in der Aufgabe* 2 *und der Gleichung* $(*)$ *in der Aufgabe* 3.

5. (P)*

Wir betrachten ein Problem

$$\dot{y} = f(y), \;\; y(t_0) = y_0$$

mit einer quadratischen Invariante

$$Q(y(t)) = y(t)^\top C y(t),$$

wobei C eine symmetrische Matrix ist.
D.h. $y^\top C f(y) = 0 \; \forall y$ und es folgt $Q(y(t)) = Q(y(t_0)) \; \forall t > t_0$.

a) Zeigen Sie, dass ein Gauss-Kollokationsverfahren eine quadratische Invariante erhaltet, d.h. $y_1^\top C y_1 = y_0^\top C y_0$.

b) Wir definieren die Vektoren $f(y) = (-y_2, y_1)^\top$ und $y(0) = (1, 0)^\top$. Zeigen Sie, dass die Lösung von $\dot{y} = f(y)$ die Gleichung $y_1^2 + y_2^2 = 1$ erfüllt.

c) Was passiert, wenn man numerisch dieses Problem löst? Z.b. mit dem expliziten Euler- und Mittelpunktsvefahren mit $h = 0.1$, $t \in [0, 50]$?