Zusammenfassung: Kapitel 1

- Problemstellung: Wir betrachten das Anfangswertproblem (AWP)

$$\begin{cases} \dot{y}(t) &= f(t, y(t)) \\ y(t_0) &= y_0, \end{cases}$$

auf dem Zeitintervall $[t_0, T_{END}]$ mit $f : U \to \mathbb{R}^n$ und $(t_0, y_0) \in U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ gegeben. Notation:

$$\begin{cases} y'(x) &= f(x, y(x)) \\ y(x_0) &= y_0. \end{cases}$$

- Sätze von Cauchy und Peano (Existenz und Eindeutigkeit der Lösung des AWPs).

- Für eine Zerlegung $x_k = x_0 + kh$ $(k = 1, 2, \ldots)$ mit konstanter Schrittweite h des Intervalls $[x_0, X_{End}]$, definieren wir ein *explizites Einschrittverfahren*

$$y_{k+1} = y_k + h\Phi(x_k, y_k, h), \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Der *lokale Fehler* ist $y(x_0 + h) - y_1$. Ein solches Verfahren hat *Ordnung* p falls $y(x_0 + h) - y_1 = \mathcal{O}(h^{p+1})$ für $h \to 0$ und alle AWP mit f genügend differenzierbar. Nach dem Konvergenz-Satz, ist der *globale Fehler* $\mathcal{O}(h^p)$.

- Seien $s \geq 1$ eine ganze Zahl, $b_i, a_{ij} \in \mathbb{R}$ für $i = 1, \ldots, s$ und $j = 1, \ldots, i-1$, $c_1 = 0$ und $c_i = \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}$. Das numerische Verfahren

$$\begin{cases} k_1 &= f(t_0, y_0) \\ k_2 &= f(t_0 + c_2 h, y_0 + h a_{21} k_1) \\ & \ldots \\ k_s &= f(t_0 + c_s h, y_0 + h \sum_{j=1}^{s-1} a_{sj} k_j) \\ y_1 &= y_0 + h \sum_{j=1}^{s} b_j k_j \end{cases}$$

heisst ein *s-stufiges explizites Runge-Kutta Verfahren*. Notation:

$$\begin{array}{c|ccccc} 0 & & & & & \\ c_2 & a_{21} & & & & \\ c_3 & a_{31} & a_{32} & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\ c_s & a_{s1} & a_{s2} & \ldots & a_{s,s-1} & \\ \hline & b_1 & b_2 & \ldots & b_{s-1} & b_s \end{array}$$

Wir haben noch einen Konvergenz-Satz und die Theorie über die Bäumen gesehen.

- Adaptive Steuerung von Einschrittverfahren. Für eine gegebene Toleranz TOL und die Parametern η_{max}, η_{min}, lautet der Algorithmus: