Zusammenfassung: Kapitel II

- Wir definieren ein *lineares k-Schrittverfahren* als

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i y_{n+i} = h \sum_{i=0}^{k} \beta_i f_{n+i}, \tag{1}$$

wo $\alpha_k \neq 0$ und $|\alpha_0| + |\beta_0| > 0$. Falls $\beta_k = 0$ ist das Verfahren *explizit*, sonst ist es *implizit*.

- Herleitung von expliziten Verfahren: *Adams-Bashforth*. Diese Klasse von Verfahren ist gegeben als

$$y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} p(t)\mathrm{d}t,$$

mit $p(t)$ ein Interpolationspolynom vom Grad $k-1$: $p(x_j) = f_j$ für $j = n, n-1, \ldots, n-k+1$. Wir wenden dann die Formel von Newton und die Rückwärtsdifferenzen an und bekommen

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{j=0}^{k-1} \gamma_j \nabla^j f_n,$$

mit $\gamma_j = \displaystyle\int_0^1 \binom{s+j-1}{j} \mathrm{d}s$ und $\nabla^j f_n = \nabla^{j-1} f_n - \nabla^{j-1} f_{n-1}$, $\nabla^0 f_n := f_n$.

- Herleitung von impliziten Verfahren: *Adams-Moulton*. Dieses Mal nehmen wir ein Interpolationspolynom vom Grad k mit $p^*(x_j) = f_j$ für $j = n+1, n \ldots, n-k+1$ und wie früher bekommen wir

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{j=0}^{k} \gamma_j^* \nabla^j f_{n+1},$$

mit $\gamma_j^* = \displaystyle\int_0^1 \binom{s+j-2}{j} \mathrm{d}s$.

- Herleitung von *BDF-Verfahren*. Wir betrachten ein Interpolationspolynom vom Grad k so, dass $q(x_j) = y_j$ für $j = n+1, n, \ldots, n-k+1$ und y_{n+1} ist bestimmt durch $q'(x_{n+1}) = f(x_{n+1}, q(x_{n+1})) = f(x_{n+1}, y_{n+1})$. Wir bekommen dann

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j} \nabla^j y_{n+1} = h f_{n+1}.$$

- Sei $y(x)$ die exakte Lösung von $y' = f(x,y)$. Wir setzen $y_i = y(x_i)$ für $i = n, n+1, \ldots, n+k-1$. Der *lokale Fehler* ist $y(x_{n+k}) - y_{n+k}$. Das Mehrschrittverfahren (1) hat *Ordnung* p falls der lokale Fehler $= \mathcal{O}(h^{p+1})$ (für alle AWP mit genügend differenzierbaren f). Wir haben auch gesehen wie man überprüft ob das Verfahren Ordnung p hat, z.B.

$$\text{Ordnung } p \iff \sum_{i=0}^{k} \alpha_i = 0 \text{ und } \sum_{i=0}^{k} \alpha_i i^q = q \sum_{i=0}^{k} \beta_i i^{q-1} \text{ für } q = 1, \ldots, p.$$

- Zu einem Verfahren (1) assoziieren wir die Polynome $\rho(\zeta) = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i \zeta^i$ und $\sigma(\zeta) = \sum_{i=0}^{k} \beta_i \zeta^i$. Das Verfahren (1) ist *konsistent* falls $\rho(1) = 0$ und $\rho'(1) = \sigma(1)$.

- Das Verfahren (1) heisst *stabil* falls die Wurzeln/Nullstellen des Polynoms $\rho(\zeta)$ erfüllen

  (i) Falls $\rho(\hat{\zeta}) = 0$ dann $|\hat{\zeta}| \leq 1$.

  (ii) Falls $\rho(\hat{\zeta}) = 0$ und $|\hat{\zeta}| = 1$ dann ist $\hat{\zeta}$ eine einfache Wurzel/Nullstelle von $\rho(\zeta)$.

  Der Satz über die Wurzel/Nullstelle von $\rho(\zeta)$ hilft uns um zu wissen wann ein Verfahren stabil ist oder nicht: Seien $\eta_1, \ldots, \eta_m$ die Nullstellen von $\rho(\zeta)$ mit Multiplizitäten $\ell_1, \ldots, \ell_m$. Die allg. Lösung der *Differenzengleichung* $\sum_{i=0}^{k} \alpha_i y_{n+i} = 0$, $n = 0, 1, \ldots$ ist $y_n = p_1(n)\eta_1^n + \ldots + p_m(n)\eta_m^n$ mit Polynomen $p_j(n)$ vom Grad $\ell_j - 1$.
  Die *erste Dahlquist-Schranke* sagt uns, dass die Ordnung p eines stabilen k-Schrittverfahrens (1) erfüllt:

  $$p \leq k + 2 \ (k \text{ gerade}), p \leq k + 1 \ (k \text{ ungerade}), p \leq k \ (\text{falls } \beta_k/\alpha_k \leq 0).$$

  Wir haben noch ein Ergebnis über die BDF-Verfahren gesehen: sie sind instabil für $k \geq 7$ und stabil sonst.

- Im letzten Abschnitt haben wir gezeigt, dass Konvergenz äquivalent zur Stabilität und Konsistenz ist.