

Zusammenfassung: Kapitel III

- Eine *steife Differentialgleichung* ist eine Gleichung, wo bestimmte implizite Verfahren viel besser funktionieren als explizite Verfahren. Bsp: $\dot{y} = -1000y - (1001e^{-t})$; $\dot{y} = Ay$ mit $\begin{pmatrix} -10 & 6 \\ 13.5 & -10 \end{pmatrix}$ (Fox, Goodwin (1949)).
- Die Lösung $y(t, t_0, y_0)$ des AWP's $\dot{y} = f(y), y(t_0) = y_0$ ist *stabil* (im Sinn von Lyapunov) \iff
 - (i) Die Lösung existiert für alle $t \geq t_0$.
 - (ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ so, dass $\forall \Delta y_0$ mit $\|\Delta y_0\| < \delta$ hat man $\|y(t, t_0, y_0 + \Delta y_0) - y(t, t_0, y_0)\| < \varepsilon$.
 - Die Lösung $y(t, t_0, y_0)$ ist *asymptotisch stabil* \iff
 - (i) Die Lösung ist stabil.
 - (ii) $\lim_{t \rightarrow \infty} (y(t, t_0, y_0 + \Delta y_0) - y(t, t_0, y_0)) = 0$ für eine Störung Δy_0 klein genug.
 - Sei das Problem $\dot{y} = Ay$ mit einer $n \times n$ Matrix A mit Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.
Das Problem ist stabil $\iff \operatorname{Re}(\lambda_i) \leq 0$ für $i = 1, \dots, n$ und $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$ falls $\dim(\text{Jordan Block zu } \lambda_i) > 1$.
Das Problem ist asymptotisch stabil $\iff \operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$ für $i = 1, \dots, n$.
 - Für ein Problem $\dot{y} = f(y)$, nennt man $y(t) = y_0$ ein *Gleichgewichtszustand* oder *kritischer Punkt* von f falls $f(y_0) = 0$.
Seien $f \in C^1$ und y_0 ein kritischer Punkt von f :
Falls die Eigenwerte von $f'(y_0)$ $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$ erfüllen, dann ist $y(t) = y_0$ asymptotisch stabil.
Falls ein Eigenwert von $f'(y_0)$ $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$ erfüllt, dann ist $y(t) = y_0$ instabil.
 - Herleitung der *Dahlquist-Testgleichung* $y' = \lambda y, y(0) = 1$ mit $\lambda \in \mathbb{C}$.
Die *Stabilitätsfunktion* eines expliziten Runge-Kutta Verfahrens ist gegeben durch das Polynom $R(z) = 1 + zb^T(1 - zA)^{-1}\mathbb{1}$, mit $z = h\lambda$, $b = (b_1, \dots, b_s)^T$, $A = (a_{ij})_{i,j=1}^s$, $\mathbb{1} = (1, \dots, 1)^T$.
 $S := \{z \in \mathbb{C} : |R(z)| \leq 1\}$ ist das *Stabilitätsgebiet* eines expliziten Runge-Kutta Verfahrens.
Ein Verfahren ist *A-stabil* falls $\mathbb{C}^- \subset S$, d.h. $|R(z)| \leq 1$ für $\operatorname{Re}(z) \leq 0$.
Das Stabilitätsgebiet eines expliziten Runge-Kutta Verfahrens ist beschränkt und so kann ein solches Verfahren nicht A-stabil sein. Deshalb muss man auf die Schrittweite h achten, wenn man solche Verfahren benutzen will.

- Das *Stabilitätsgebiet* von einem linearen Mehrschrittverfahren (LMV) ist $S := \{\mu \in \mathbb{C} : \text{alle Nullstellen von } \rho(\zeta) - \mu\sigma(\zeta) \text{ erfüllen } |\zeta_i(\mu)| \leq 1 \text{ und } |\zeta_i(\mu)| < 1 \text{ für eine mehrfache Nullstelle}\}$.

Das LMV ist *A-stabil* falls $\mathbb{C}^- \subset S$. Es folgt, dass falls $\mu = h\lambda \in S$ dann bleibt die numerische Lösung beschränkt.

Falls das LMV explizit ist, dann ist S beschränkt und das Verfahren ist nicht *A-stabil*. Die Adams-Bashforth-Verfahren sind dann nicht *A-stabil*.

Die *root locus curve* $\Gamma(\theta) = \frac{\rho(e^{i\theta})}{\sigma(e^{i\theta})}$ für $\theta \in [0, 2\pi]$ hilft uns um den Rand von S , ∂S , zu zeichnen.

Die k -Schritt-Adams-Moulton-Verfahren sind nicht *A-stabil* für $k \geq 2$.

Die *zweite Dahlquist-Schranke* sagt uns, u.a., dass das einzige *A-stabile* LMV mit Ordnung $p = 2$ und Fehlerkonstante $C = \frac{-1}{12}$ die Trapez-Regel ist.

Ein Verfahren heisst $A(\alpha)$ -stabil für $0 < \alpha < \pi/2$ falls $S_\alpha := \{\mu \in \mathbb{C} : |\arg(-\mu)| \leq \alpha\} \subset S$.

- Für $s \geq 1$ eine ganze Zahl, $b_i, a_{ij}, c_i \in \mathbb{R}$ für $i, j = 1, \dots, s$. Das numerische Verfahren

$$\begin{cases} k_i = f(x_0 + c_i h, y_0 + h \sum_{j=1}^s a_{ij} k_j) & i = 1, 2, \dots, s \\ y_1 = y_0 + h \sum_{j=1}^s b_j k_j \end{cases}$$

heisst ein *s-stufiges Runge-Kutta Verfahren*. Notation: $\frac{c}{a} \Big| \frac{a}{b}$.

Das *Kollokationspolynom* $u(x)$ vom Grad s zu den Stützstellen $0 \leq c_1 < c_2 < \dots < c_s \leq 1$ ist definiert durch

$$\begin{cases} u(x_0) = y_0 \\ u'(x_0 + c_i h) = f(x_0 + c_i h, u(x_0 + c_i h)) & i = 1, \dots, s. \end{cases}$$

Das *Kollokationsverfahren* ist dann definiert durch

$$y_1 = u(x_0 + h).$$

Ein Kollokationsverfahren ist ein *s-stufiges Runge-Kutta Verfahren* mit

$$a_{ij} = \int_0^{c_i} \ell_j(\tau) d\tau \text{ und } b_i = \int_0^1 \ell_i(\tau) d\tau,$$

wobei $\ell_i(\tau)$ das Lagrange-Polynom vom Grad $s - 1$ ist.

Beispiele: *Gauss-Verfahren* ($s = 1$ Mittelpunktsregel), *Radau-Verfahren* ($s = 1$ Implizites Euler-Verfahren), *Lobatto-Verfahren* ($s = 2$ Trapez-Regel).

Die *Stabilitätsfunktion* eines Runge-Kutta Verfahrens ist gegeben durch die rationale Funktion

$$R(z) = 1 + zb^T(1 - zA)^{-1} \mathbb{1} = \frac{\det(I - zA + z\mathbb{1}b^T)}{\det(I - zA)}.$$

Die Verfahren von Gauss, Radau und Lobatto sind *A-stabil* (Beweis: order star).

In Praxis: Implizites Euler-Verfahren, Trapez-Regel, BDF, Radau *IIA*, und das Beste: Radau 5.