Zusammenfassung: Kapitel IV

- Sei das Problem $\dot{y} = f(y), y(t_0) = y_0$, der *Fluss* $\varphi_t(y_0) = y(t, t_0, y_0) = y(t)$ ist der Wert der Lösungskurve an der Stelle t für jene Lösung y mit $y(t_0) = y_0$. Falls der Fluss geometrische Eigenschaften hat, suchen wir numerische Verfahren mit denselben Eigenschaften (Bsp: Pendel, 2-Körperproblem).

- Sei $H : \mathbb{R}^{2d} \longrightarrow \mathbb{R}$, die *Hamiltonschen Differentialgleichungen* lauten

$$\begin{aligned} \dot{p}_k(t) &= -\frac{\partial H}{\partial q_k}(p(t), q(t)) \\ \dot{q}_k(t) &= \frac{\partial H}{\partial p_k}(p(t), q(t)) \quad \text{für} \quad k = 1, \ldots, d. \end{aligned} \tag{1}$$

  Die gesamte Energie H ist eine *Erhaltungsgrösse*, d.h. $H(p(t), q(t)) = H(p(t_0), q(t_0))$ $\forall t > t_0$ für die exakte Lösung von (1).

- Eine differenzierbare Abbildung $g : U \longrightarrow \mathbb{R}^{2d}$, mit $U \subset \mathbb{R}^{2d}$, heisst *symplektisch*, falls für jedes $(p, q) \in U$ die Ableitung $g'(p, q)$ eine symplektische lineare Abbildung ist, d.h.

$$g'(p, q)^T J g'(p, q) = J \quad \forall \ (p, q) \in U,$$

  mit $J = \begin{pmatrix} 0 & I_d \\ -I_d & 0 \end{pmatrix}$.

  Der Fluss eines Hamiltonschen Systems ist symplektisch.

- Ein numerisches Verfahren $y_1 = \Phi_h(y_0)$ mit $\Phi_h : \mathbb{R}^{2d} \longrightarrow \mathbb{R}^{2d}$ ist *symplektisch* $\Longleftrightarrow$ Φ_h ist symplektisch.

  Bsp: Symplektisches Euler, Mittelpunktsregel, Störmer-Verlet, Runge-Kutta Verfahren mit $b_i a_{ij} + b_j a_{ji} = b_i b_j$ für $i, j = 1, \ldots, s$ (z.B. die Gauss-Runge-Kutta-Verfahren).

  Mit der Rückwärtsfehleranalysis kann man zeigen, dass ein symplektisches Verfahren angewandt auf eine Hamiltonsche Gleichung sehr gute Langzeit-Energieerhaltung hat:

$$H(p_n, q_n) = H(p_0, q_0) + \mathcal{O}(h^p)$$

  für exponentielle lange Zeiten $nh \leq \mathrm{e}^{\kappa/h}$, mit $\kappa > 0$ und p die Ordnung des Verfahrens.