

KdV-Gleichung

Maximilian Amsler und Markus Oberle

13.5.2008



- 1 Geschichtliches
- 2 Die KdV-Gleichung
- 3 Numerische Lösung
- 4 Solitonen im Drei-Rosen-Park

Entdeckung der Solitonen

- 1834: Entdeckung der Solitonen durch den britischen Ingenieur John Scott Russell

Zitat

Ich beobachtete die Bewegung eines Bootes, das von einem Pferdegespann ziemlich rasch einen engen Kanal entlang gezogen wurde, als das Boot plötzlich anhielt nicht jedoch die Wassermasse im Kanal, die das Boot in Bewegung gesetzt hatte; sie sammelte sich rund um den Schiffsbug in einem Zustand wilder Erregung, ließ das Schiff dann plötzlich hinter sich, rollte mit hoher Geschwindigkeit vorwärts, nahm dabei die Form einer großen einzelnen Erhöhung an, ein abgerundeter, glatter, wohldefinierter Haufen Wasser, der entlang dem Kanal anscheinend ohne Formveränderung oder Geschwindigkeitsabnahme seinen Lauf nahm.

Entdeckung der Solitonen

- 1834: Entdeckung der Solitonen durch den britischen Ingenieur John Scott Russell

Zitat

Ich beobachtete die Bewegung eines Bootes, das von einem Pferdegespann ziemlich rasch einen engen Kanal entlang gezogen wurde, als das Boot plötzlich anhielt nicht jedoch die Wassermasse im Kanal, die das Boot in Bewegung gesetzt hatte; sie sammelte sich rund um den Schiffsbug in einem Zustand wilder Erregung, ließ das Schiff dann plötzlich hinter sich, rollte mit hoher Geschwindigkeit vorwärts, nahm dabei die Form einer großen einzelnen Erhöhung an, ein abgerundeter, glatter, wohldefinierter Haufen Wasser, der entlang dem Kanal anscheinend ohne Formveränderung oder Geschwindigkeitsabnahme seinen Lauf nahm.

Ich begleitete diese Welle auf meinem Pferd und überholte sie, während sie sich immer noch mit einer Geschwindigkeit von etwa acht oder neun Meilen pro Stunde bewegte, wobei sie ihre ursprüngliche Gestalt von etwa 30 Fuß Länge und ein bis eineinhalb Fuß Höhe beibehielt. Die Höhe nahm allmählich ab, und nachdem ich das ganze für etwa ein oder zwei Meilen beobachtet hatte, verlor ich es in den Windungen des Kanals aus dem Auge.

- 1895: Theoretische Beschreibung des Phänomens durch die Korteweg-de Vries-Gleichung (KdV)
- 1955: Enrico Fermi, John Pasta und Stanislaw Ulam entdecken in FPU-Experiment, dass sich eine nicht-lineare Störung auf ein System von gekoppelten Oszillatoren nicht (wie bis dahin angenommen) gleichmässig auf alle Eigenschwingungen verteilt. Vielmehr wird die Energie periodisch auf das System verteilt.
⇒ Energieverteilung kehrt periodisch zur Anfangsverteilung zurück
- 1965: Martin Kruskal und Norman Zabuski führen das Ergebnis des FPU-Experiments auf die KdV-Gleichung zurück
- Die mathematische Lösung der KdV-Gleichung gelang Clifford Gardner, John Green, Martin Kruskal und Robert Miura. Dabei wurde die inverse Streutheorie der Quantenmechanik verwendet. Damit wurden zwei bis dahin unabhängige Gebiete der Physik miteinander verknüpft.
- Heutige Anwendung: Glasfaserkabel (10TBit/sec)

KdV-Gleichung

Ursprüngliche Gleichung (im Kanal)

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{\frac{g}{l}} \cdot \frac{\partial \left(\frac{1}{2} \eta^2 + \frac{2}{3} \alpha \eta + \frac{1}{3} \sigma \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right)}{\partial x} \quad (1)$$

$$\sigma = \frac{l^3}{3} - \frac{Tl}{\rho g} \quad (2)$$

wobei:

- l Tiefe des Kanals
- g Erdbeschleunigung
- T Oberflächenspannung
- ρ Dichte der Flüssigkeit

KdV-Gleichung

Umskalierte Gleichung

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (3)$$

Es handelt sich hierbei um eine nicht-lineare, dispersive partielle Differentialgleichung dritter Ordnung in $u = u(x, t)$.

Solitonen als Lösung der KdV-Gleichung

Annahme: die Lösung ist eine Welle mit konstanter Geschwindigkeit und Form

$$u(x, t) = f(x - ct)$$

Damit erhalten wir eine gewöhnliche Differentialgleichung

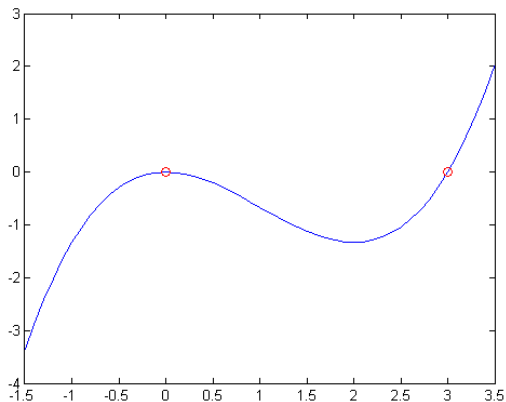
$$-c \frac{df}{dx} + \frac{d^3 f}{dx^3} + 6f \frac{df}{dx} = 0$$

Integration nach x

$$\begin{aligned} -cf + \frac{d^2 f}{dx^2} + 3f^2 &= A (= \text{const}) \\ \Rightarrow F := A + cf - 3f^2 &= \frac{d^2 f}{dx^2} \end{aligned}$$

Diese Gleichung kann als Newtonsche Bewegungsgleichung in einem kubischen Potential interpretiert werden.

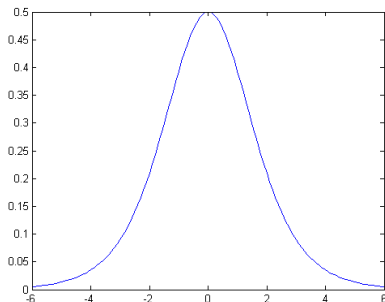
$$f(x) = 0 \quad x = \pm\infty$$



Dies ist das typische Verhalten einer sog. Soliton-Welle. Eine solche Welle wird beschrieben durch die Gleichung

Soliton

$$u(x, t) = \frac{c}{2 \cosh^2 \left[\frac{\sqrt{c}}{2} (x - ct - a) \right]} \quad (4)$$



Was sind Solitonen?

Aus der Alltagserfahrung kennt man von Wasserwellen zwei Phänomene:

- Dispersion: wenn lineare Effekte die Wellenform bestimmen führt dies zu einem Zerfliessen der Welle
- Brechen: wenn nicht-lineare Effekte vorherrschen kommt es zum Brechen der Welle

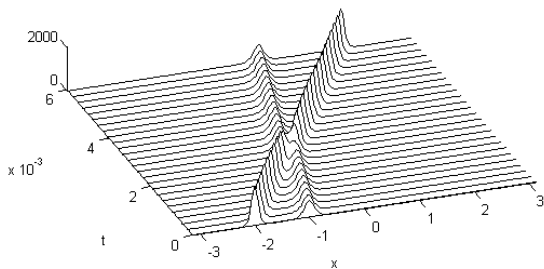
Wenn sich die beiden Effekte die Waage halten, dann entstehen Wellen, welche sich Ausbreiten, ohne ihre Form zu ändern

⇒ **Solitonen**

Matlab

Kollision zweier Solitonen

⇒ **Matlab**



```

1 function y=KdV()
2   %Solve KdV equation
3   %FFT with integrating factor
4   %Set up grid and two soliton initial data
5   N=256; dt=0.4/N^2;x=(2*pi/N)*(-N/2:N/2-1)';
6   A=25; B=16; clf, drawnow
7   u=3*A^2*sech(0.5*(A*(x+2))).^2+3*B^2*sech(0.5*(B*(x+1))).^2;
8   v=fft(u); k=[0:N/2-1 0 -N/2+1:-1]'; ik3 = 1*i*k.^3;
9
10  %Solve PDE and plot results
11  tmax=0.006; nplt = floor((tmax/25)/dt); nmax= round(tmax/dt);
12  udata=u; tdata=0; h=waitbar(0, 'please wait ... ');
13
14  for n=1:nmax
15      t= n*dt ; g=-0.5i*dt*k;
16      E=exp(dt*ik3/2); E2 = E.^2;
17      a=g.*fft(real(ifft(v)).^2);
18      b=g.*fft(real(ifft(E.*(v+a/2))).^2);
19      c=g.*fft(real(ifft(E.*v+b/2)).^2);
20      d=g.*fft(real(ifft(E2.*v+E.*c)).^2);
21      v=E2.*v+ (E2.*a+2*E.*(b+c)+d)/6;
22      if mod(n,nplt)==0
23          u=real(ifft(v)); waitbar(n/nmax)
24          udata=[udata u]; tdata= [tdata t];
25      end
26  end
27
28  waterfall(x,tdata,udata'), colormap([0 0 0]), view(-20,25)
29  xlabel x, ylabel t, axis([-pi pi 0 tmax 0 2000]), grid off
30  set(gca,'ztick',[0 2000]), close(h), pbaspect([1 1 0.13])

```

Video 1

Film 1: Solitonen

Video 2

Film 1: Solitonen

Video 3

Film 1: Solitonen