Die Burgers Gleichung

Vortrag im Rahmen der Vorlesung Spektralmethoden

Elena Frenkel   Samuel Voit   Balthasar Meyer

29. Mai 2008

Ein kurzer Überblick

Burgers Gleichung

$$u_t + uu_x = \nu u_{xx}$$

- Von Burgers vorgeschlagen als einfache Gleichung zur Beschreibung von Turbulenz
- Beschreibt z.B. Gasdynamik und Strassenverkehr
- Nichtlinearer Term und Dispersionsterm
- Exakt lösbar

Burgers und Navier-Stokes

Burgers vs. Navier-Stokes

Burgers Gleichung:

$$u_t + uu_x = \nu u_{xx}$$

Navier-Stokes Gleichungen:

$$\begin{aligned} \rho \mathbf{u}_t + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p &= \nu \Delta \mathbf{u} \\ \mathrm{div} \mathbf{u} &= 0 \end{aligned}$$

- Man sieht, dass mit $\rho = 1$ und $p = 0$ die Burgers Gleichung (fast) ein Spezialfall der Navier-Stokes Gleichungen ist

Aber wer war dieser Burgers?

Abbildung: Johannes Martinus Burgers (1895-1981)

- Holländischer Physiker
- Wurde mit 23 Professor in Delft, später University of Maryland
- Reiste viel, besonders auch in Russland
- Burgers Gleichung, Burgers Vektor, Burgers Material

Physikalische Motivation

Wir betrachten eine Dichte ρ und einen Fluss q und fordern ein einfaches Erhaltungsgesetz:

$$\frac{d}{dt}\int_{x_2}^{x_1}\rho(x,t)dx + q(x_1,t) - q(x_2,t) = 0$$

Für $x_1 \to x_2$ kriegt man

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0.$$

Es ist vernünftig, eine Beziehung zwischen q und ρ anzunehmen. Ein einfaches Beispiel ist $q = \frac{1}{2}\rho^2 - \nu\rho_x$. So erhalten wir Burgers Gleichung

$$\rho_t + \rho\rho_x = \nu\rho_{xx}.$$

Cole-Hopf Transformation

- Mit der Cole-Hopf Transformation lässt sich die Burgers Gleichung auf die Wärmegleichung reduzieren:

Cole-Hopf Transformation

$$c = -2\nu \frac{\phi_x}{\phi}$$

Wärmegleichung

$$\begin{cases} \phi_t = \nu \phi_{xx} \\ \phi = \exp\left(-\frac{1}{2\nu}\int_0^x F(\eta)d\eta\right), t = 0 \end{cases}$$

- $F()$ ist die Anfangsbedingung füer die Burgers Gleichung

Cole-Hopf Transformation: Vorgehen

Zuerst setzt man

$$u = \psi_x$$

und setzt das in die Burgers Gleichung ein. Integrieren ergibt

$$\psi_t + \frac{1}{2}\psi_x^2 = \nu\psi_{xx}.$$

Nun führt man

$$\psi = -2\nu \log(\phi)$$

ein und erhält

$$\phi_t = \nu\phi_{xx}.$$

Exakte Lösung mit der Cole-Hopf Transformation (1)

Exakte Lösung für Burgers Gleichung

$$u(x,t) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-\eta}{t} e^{-G/2\nu} d\eta}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-G/2\nu} d\eta},$$

wo

$$G(\eta; x, t) = \int_0^{\eta} F(\eta') d\eta' + \frac{(x-\eta)^2}{2t}.$$

Exakte Lösung mit der Cole-Hopf Transformation (2)

- Man kann zeigen, dass für $\nu \longrightarrow 0$ diese Lösung eine Lösung für den nichtlinearen Teil der Burgers Gleichung ist $u_t + uu_x = 0$
- Nichtstetige Lösungen dieser Gleichung beschreiben Schockwellen
- Die Gleichung mit $\nu = 0$ wird auch reibungsfreie (inviscid) Burgers Gleichung genannt

Methode der Charakteristiken

- Die Methode der Charakteristiken führt eine PDE auf ein System von ODE's zurück
- Funktioniert allgemein für hyperbolische PDE
- Geeignet für die qualitative Untersuchung der Lösung

Herleitung der Charakteristischen Kurven (1)

Wir untersuchen das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0 \\ u = f(x), t = 0 \end{cases}$$

Fasse x als Funktion von t auf, $x = x(t)$. Definiere die totale Ableitung

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x}.$$

Nun erhalten wir folgendes System von ODE's:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = 0 \\ \frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial t} + u\frac{\partial x}{\partial x} = u \end{cases}$$

Herleitung der Charakteristischen Kurven (2)

Sei nun C eine solche Kurve mit $x(0) = \xi$. Dann lautet die Lösung auf dieser Kurve

$$\begin{cases} u = f(\xi) \\ x(t) = f(\xi)t + \xi \end{cases}$$

Diese Kurve wird *charakteristische Kurve* genannt. Entlang dieser Kurven ist die Lösung konstant. Durch Variation von ξ bekommt man eine Lösung

$$u(x,t) = u(x(t),t) = u(\xi + f(\xi)t), t).$$

Charakteristische Kurven

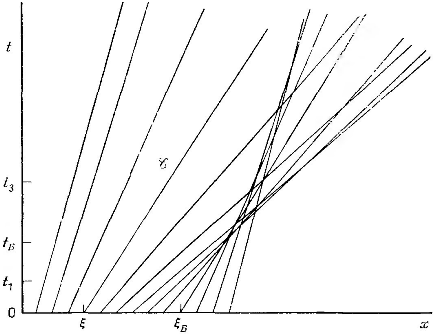

Abbildung: Charakteristische Kurven für nichtlineare Wellen

Brechende Welle

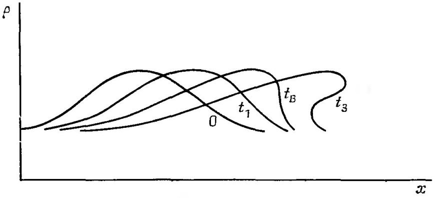

Abbildung: Brechende Welle

Numerische Lösung

Numerisches Problem

$$\begin{cases} u_t + uu_x - \nu u_{xx} = 0, \nu > 0 \\ u(-1,t) = u(1,t) = 0 \\ u(x,0) = \exp(-5x^2) \end{cases}$$

THE END

So long, folks.
Danke für die Aufmerksamkeit.