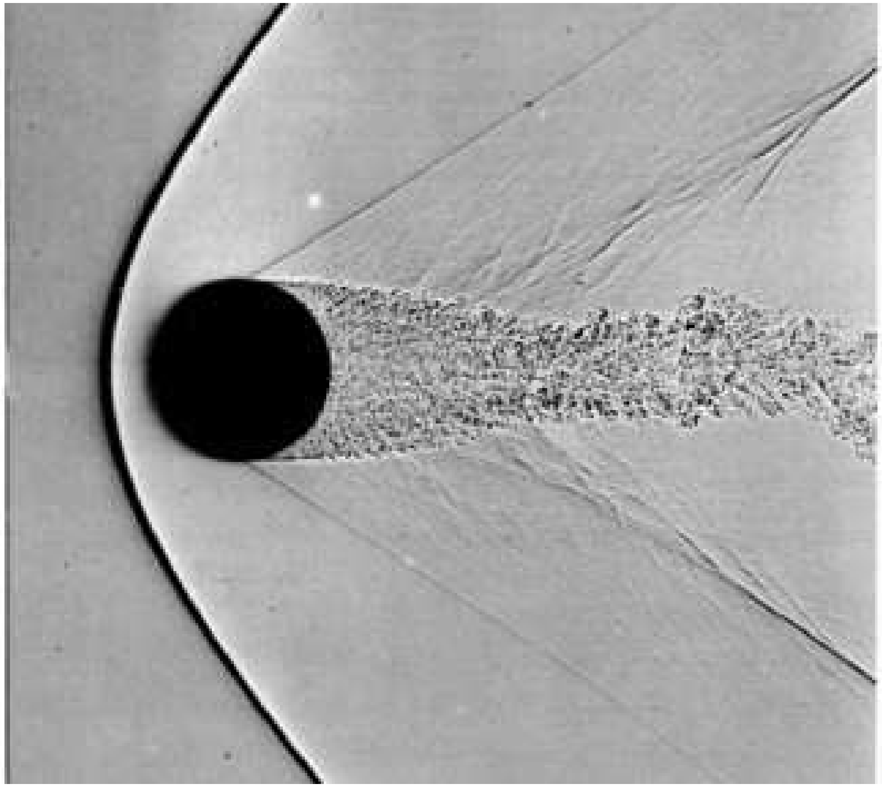
Spektralmethoden zur numerischen Lösung von Differentialgleichungen

David Cohen



Kapitel 0. Motivation

Eine Wellengleichung

Wir betrachten

$$u_t(x,t) + c(x)u_x(x,t) = 0,$$

mit $c(x) = \frac{1}{5} + \sin^2(x-1)$ und für $x \in [0, 2\pi]$ und $t > 0$.

Eine Wellengleichung

Wir betrachten

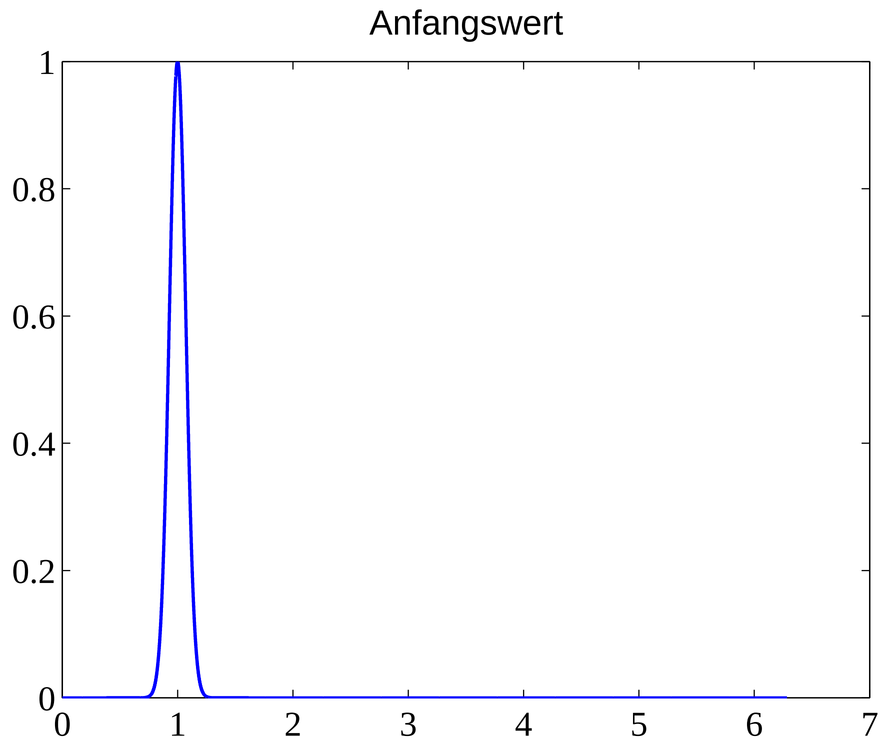
$$u_t(x,t) + c(x)u_x(x,t) = 0,$$

mit $c(x) = \frac{1}{5} + \sin^2(x-1)$ und für $x \in [0, 2\pi]$ und $t > 0$.
Wir nehmen periodischen Randbedingungen und den folgende Anfangswert

$$u(x,0) = \exp(-100(x-1)^2).$$

Eine Wellengleichung

Der Anfangswert ist fast periodisch,



was kann man tun ?

Eine Wellengleichung

EINE FOURIER-ENTWICKLUNG !!
Für ein festes t schreibt man die Lösung als

$$u(x,t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}.$$

Eine Wellengleichung

Da wir auf dem Rechner arbeiten, betrachten wir lieber

$$u_N = \sum_{k=-N/2}^{N/2} u_k(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx_k}.$$

Für alle k erfüllen die Fourier-Koeffizienten $u_k(t)$ die folgende Differentialgleichung:

$$\dot{u}_k(t) + \mathrm{i}kc(x_k)u_k(t) = 0.$$

Eine Wellengleichung

Da wir auf dem Rechner arbeiten, betrachten wir lieber

$$u_N = \sum_{k=-N/2}^{N/2} u_k(t) \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx_k}.$$

Für alle k erfüllen die Fourier-Koeffizienten $u_k(t)$ die folgende Differentialgleichung:

$$\dot{u}_k(t) + \mathrm{i}kc(x_k)u_k(t) = 0.$$

Hier benutzt man ein Zeitschritt-Verfahren, um die Lösung zu berechnen.

Resultat

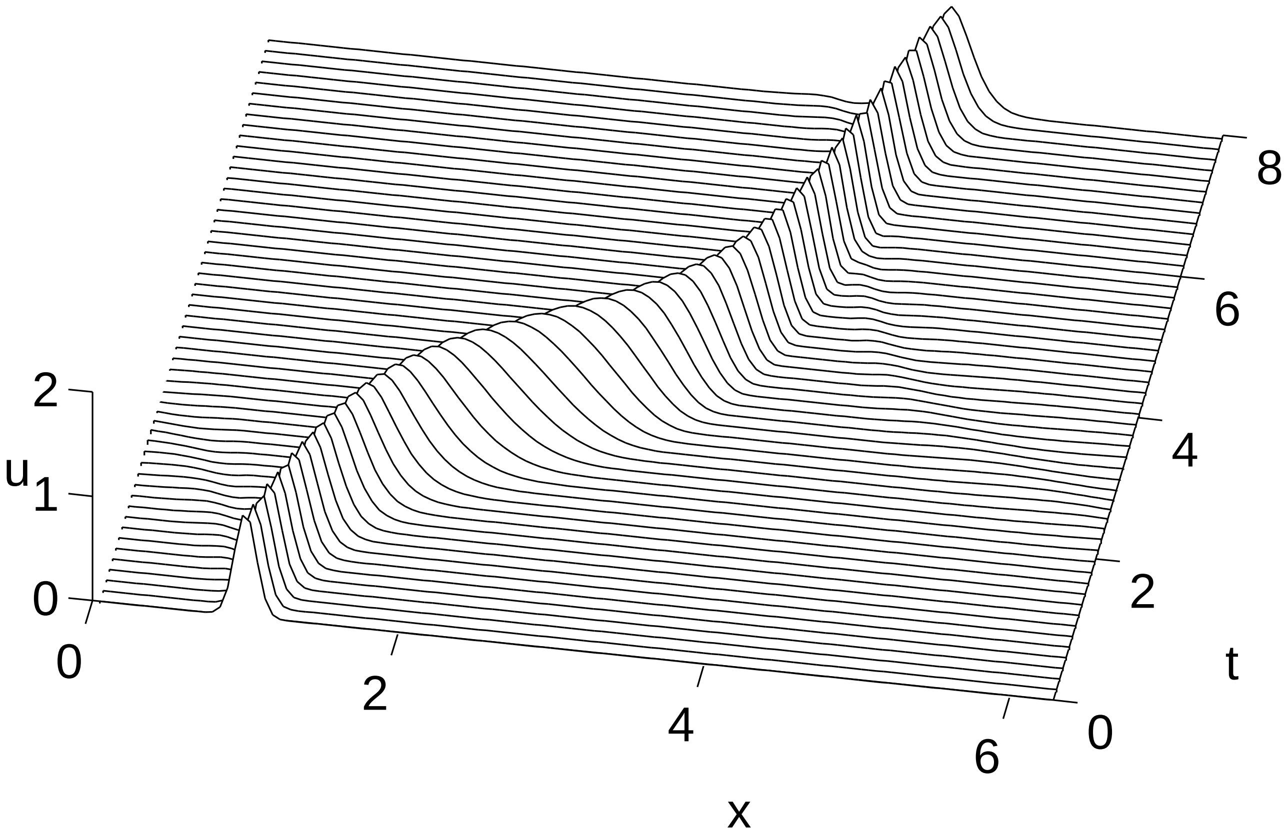


Figure 1: Mit $N = 128$.

Und mit Finiten Differenzen

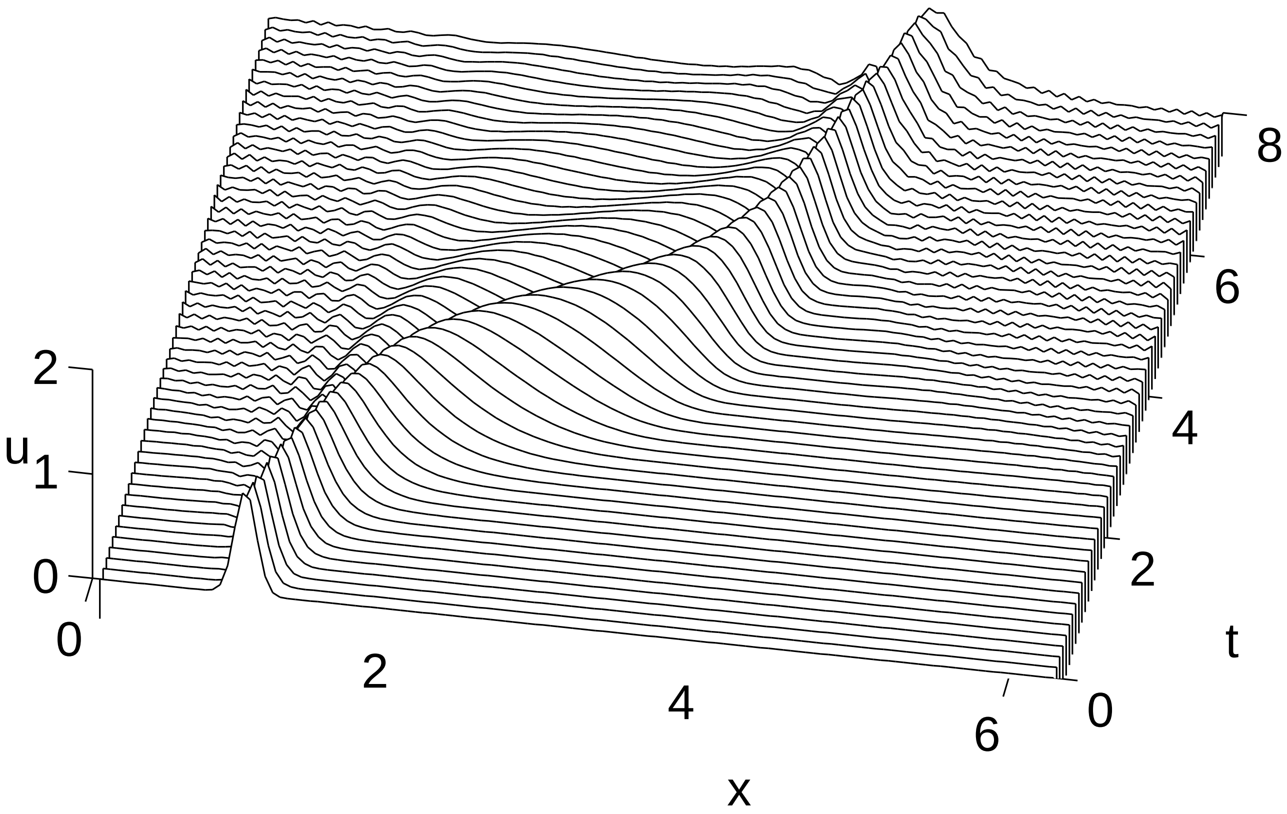


Figure 2: Mit 128 Knoten.

Und mit Finiten Differenzen

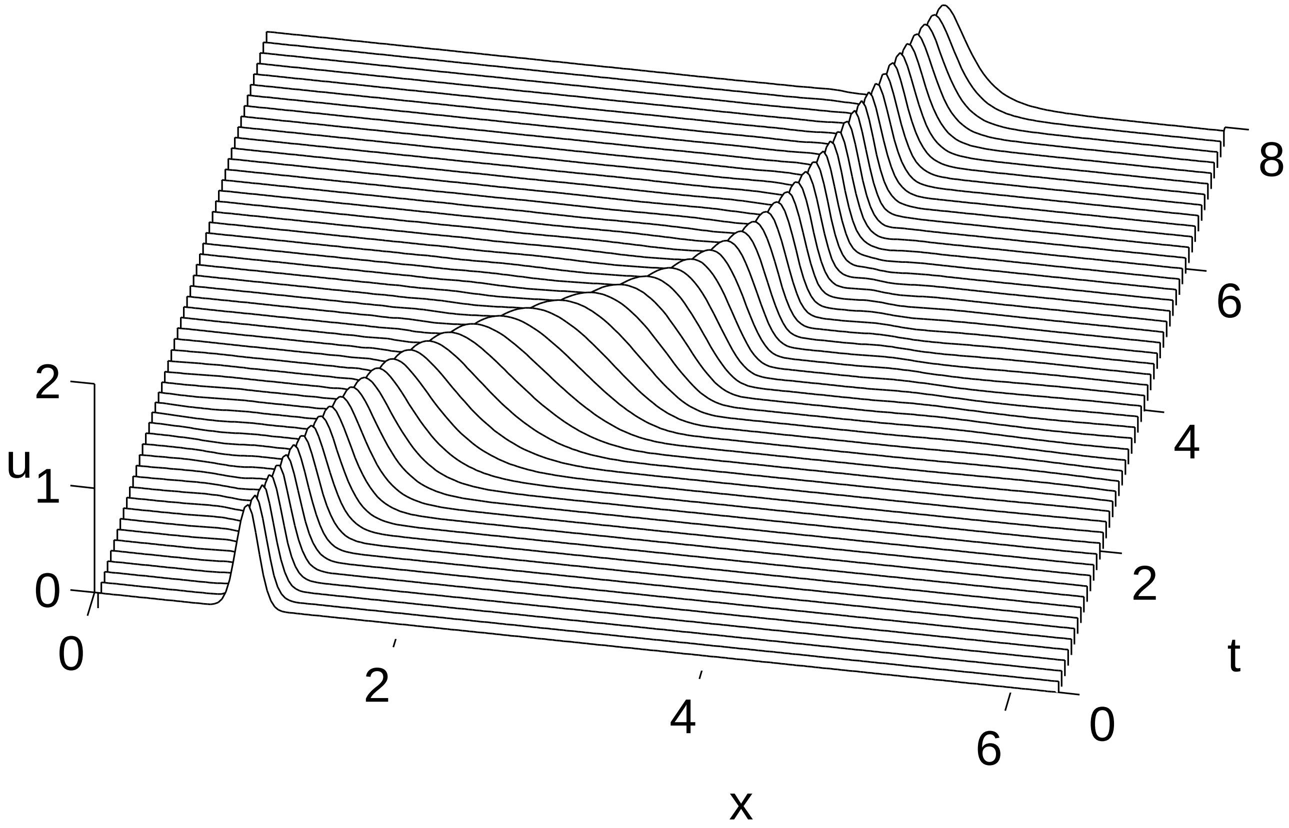


Figure 3: Mit 256 Knoten.

Warum reden wir von Spektralmethoden ?

Wir betrachten

$$\begin{aligned} u_t(x,t) - u_x(x,t) &= 0 \\ u(x,t) &= \sin(\pi \cos(x)), \end{aligned}$$

auf $[0, 2\pi]$ mit periodischen Randwerten.
Die exakte Lösung lautet

$$u(x,t) = \sin(\pi \cos(x+t)).$$

Warum sprechen wir von Spektralmethoden ?

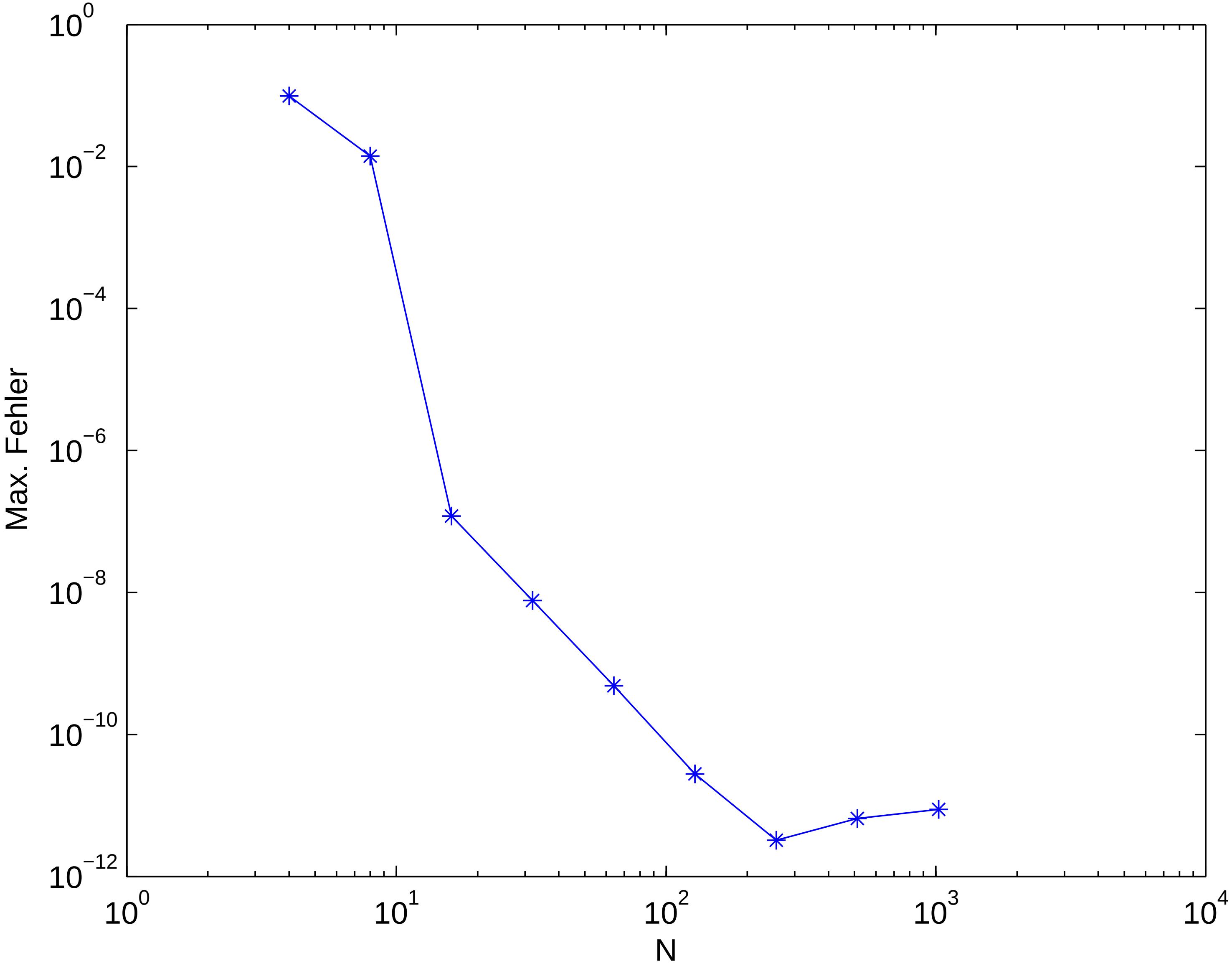


Figure 4: Maximaler Fehler bei $t = 2\pi$ für $N = 2^2$ bis 2^{10}.

Inhalt

- Grundtechniken: Fourier-Reihen, FFT, DCT und JPEG
- Intermezzo: Spektralmethoden, Einführung
- Interpolation, polynomiale Approximation und Quadraturformeln
- Spektralmethoden
- Spektralelemente Methoden