Serie 2

1.

Finden Sie die Fourier-Transformierten von den folgenden Funktionen:

$$f_1(x) = \begin{cases} \exp(-ax) & : x > 0,\ \mathbf{Re}(a) > 0 \\ 0 & : x \leq 0 \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} \frac{x^\ell}{\ell!} \exp(-ax) & : x > 0,\ \mathbf{Re}(a) > 0 \\ 0 & : x \leq 0 \end{cases}$$

Hinweis: *Für f_2, benutzen Sie die Ableitungs Formel für die Fourier-Transformation.*

2.

Finden Sie die Fourier-Transformierte von der Funktion

$$f(x) = \exp(-ax^2), \text{ mit } \mathbf{Re}(a) > 0.$$

Hinweis: *Benutzen Sie die folgende Formel*

$$f'(x) = -2axf(x).$$

Man braucht auch

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-ax^2}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

3.

Finden Sie die Faltung $f * g$ von f mit g für $f = g = \chi_{[0,1]}$.

4.

Finden Sie eine Funktion $y(x)$, die der Integralgleichung

$$\int y(x-z)y(z)\,\mathrm{d}z = \exp(-x^2)$$

genügt.

5.

Wir betrachten die Wellengleichung

$$\begin{array}{rcll} u_{tt} & = & u_{xx}+u_{yy} & \text{in } \ \Omega\times T:=(0,1)\times(0,1)\times(0,T] \\ u(x,y,0) & = & g(x,y) & \text{in } \ \Omega \\ u_t(x,y,0) & = & 0 & \text{in } \ \Omega \\ u(x,y,t) & = & 0 & \text{auf } \partial\Omega\times T. \end{array} \tag{1}$$

a) Finden Sie die Fourier-Transformation in der Zeitvariable t von der Wellengleichung (1).

b) Finden Sie eine gewöhnliche Differentialgleichung, die sich aus der Fourier-Transformation in y von der resultierende Gleichung aus (a) ergibt.

c) Lösen Sie die ergebende Gleichung aus (b).

d) Finden Sie hierbei die inverse Fourier-Transformation in y von der Lösungsfunktion aus (c).

e) Vergleichen Sie die resultierende Form aus (d) mit der Lösung von der Wellengleichung (1).

6.

Berechnen Sie per Hand die DFT (*Diskrete Fourier-Transformation*) von der Folge

$$(x_k)_{k=0,\dots,7}=(0,1,2,3,0,-3,-2,-1).$$

Implementieren Sie auch mit Matlab die DFT und IDFT (*Inverse DFT*).