Serie 3

1.

a) Finden Sie die Fourier-Koeffizienten von der 2π- periodischen Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{\pi} & : |x| < \pi \\ 0 & : x = \pi\,. \end{cases}$$

b) Implementieren Sie die DFT $z = \mathcal{F}_N(y)$ mit $y = (y_\ell)_{\ell=0}^{N-1}$, $y_\ell = f(x_\ell)$, $\ell = 0, \ldots, N-1$.

c) Plotten Sie den Fehler $|z_k - \hat{f}(k)|$.

2.

Beweisen Sie die Parsevalsche Gleichung für die DFT $z = \mathcal{F}_N(y)$:

$$N \sum_{k=0}^{N-1} |z_k|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} |y_k|^2\,.$$

3.

Beweisen Sie das *trigonometrische Polynom*

$$p_N(x) = \sum_{|k| \le N/2}{}' z_k \exp(ikx)$$

der folgenden Gleichung genügt:

$$p_N(x) = \sum_{\ell=0}^{N-1} S_N(x - x_\ell) \text{ mit } S_N(x) = \frac{\sin(Nx/2)}{N} \frac{\cos(x/2)}{\sin(x/2)}.$$

4.

Um eine DFT für reelle Folge $y = (y_\ell)_{\ell=0}^{N-1}$ schneller zu berechnen, kann man den folgenden Trick benutzen:

a) Definieren Sie die komplexe Folge $w_\ell := y_{2\ell} + \mathrm{i} y_{2\ell+1}$ für $\ell = 0, \ldots, N/2-1$. Berechnen Sie $q := \mathcal{F}_{N/2}(w)$ und setzen Sie $q_{N/2} = q_0$. Zeigen Sie, dass

$$q = (y^g + \mathrm{i} y^u)$$

mit

$$(y^g)_k = \frac{1}{N/2} \sum_{\ell=0}^{N/2-1} y_{2\ell} \exp(-2\pi \mathrm{i} \ell k/(N/2))$$

und

$$(y^u)_k = \frac{1}{N/2} \sum_{\ell=0}^{N/2-1} y_{2\ell+1} \exp(-2\pi \mathrm{i} \ell k/(N/2)).$$

Man bekommt die DFT $(\hat{y})_k = \frac{1}{N} \sum_{\ell=0}^{N-1} y_\ell \exp(-2\pi \mathrm{i} k\ell/N)$ für y wie folgt:

$$(\hat{y})_k = \frac{1}{4}(q_k + \overline{q}_{N/2-k}) - \frac{\mathrm{i}}{4}(q_k - \overline{q}_{N/2-k}) \exp(-2\pi \mathrm{i} k/N).$$

Beweisen Sie diese Gleichung.

b) Implementieren Sie die DFT für die reelle Folge aus der Aufgabe 6 in der Serie 2.