Serie 6

1.

Implementieren Sie eine Fourier-Galerkin-Methode um die folgende Gleichung zu lösen

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} &= \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x} \text{ in } (0,2\pi), \\ u(x,0) &= \sin(\pi\cos(x)) \\ u(0,t) &= u(2\pi,t). \end{cases}$$

Hinweis: Als Zeit-Verfahren, benutzen Sie Runge 4.

2.

Es sei

$$u^N(x) := \sum_{|n|\le N/2} \hat{u}_n \exp(\mathrm{i}\, n\, x),$$

wobei

$$\hat{u}_n = \frac{1}{c_n N}\sum_{j=0}^{N-1} u(x_j)\exp(-\mathrm{i}\, n\, x_j)$$

mit $x_j = \frac{2\pi j}{N}$, $c_n = \begin{cases} 1 & |n| < N/2 \\ 2 & |n| = N/2 \end{cases}$.

a) Zeigen Sie, dass

$$u^N(x) = \sum_{j=0}^{N-1} u(x_j) g_j(x),$$

mit Lagrange-Polynomen $g_j(x)$. Geben Sie einen expliziten Ausdruck für $g_j(x)$ und zeigen Sie, dass $g_j(x_i) = \delta_{ij}$.

b) Finden Sie eine Matrix D_{ij}, die der folgenden Gleichung genügt:

$$\frac{\mathrm{d}u^N(x_i)}{\mathrm{d}x} = \sum_{j=0}^{N-1} D_{ij} u(x_j).$$

Hierbei beweisen Sie, dass $\overline{D_{ij}} = -D_{ji}$.

3.

Mit Matlab, lösen Sie die folgende Gleichung

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} &= \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \text{ in } (-1,1) \\ u(x,0) &= \sin(x) \\ u(-1,t) &= u(1,t) = 0 \end{cases}$$

mit der Chebyschev-Kollokation-Methode.

Hinweis: *Als Zeit-Verfahren, benutzen Sie Runge 4.*

4.

Es sei

$$(u, v)_{N,\omega} := \sum_{j=0}^{N} u(x_j)v(x_j)\omega_j$$

mit $x_j = \cos(\pi j/N)$ und $\omega_j = \begin{cases} \pi/(2N) & j = 0, N \\ \pi/N & j = 1, \dots N-1 \end{cases}$

Berechnen Sie $(T_k, T_k)_{N,\omega}$ mit den Chebyshev-Polynomen T_k.

5.

Beweisen Sie den folgenden Satz:

Für $u(x) := \sum_{n=0}^{N} a_n T_n$ hat man

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} := \sum_{n=0}^{N} a_n^{(2)} T_n,$$

wobei

$$a_n^{(2)} = \frac{1}{c_n} \sum_{\substack{p=n+2 \\ p+n \,\text{gerade}}}^{N} p(p^2 - n^2) a_p$$

mit $c_n = \begin{cases} 2 & n = 0 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$.

6. (optional)

Zeigen Sie, dass für die n-te Chebyshev-Polynome den folgenden Gleichungen genügen:

$$\begin{aligned} T_{n+1}(x) &= 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \; T_0(x) = 1 \; T_1(x) = x, \\ 2T_n(x) &= \frac{1}{n+1}\frac{\mathrm{d}T_{n+1}(x)}{\mathrm{d}x} - \frac{1}{n-1}\frac{\mathrm{d}T_{n-1}(x)}{\mathrm{d}x}. \end{aligned}$$