Serie 7

1.

Lösen Sie

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} = 1 \text{ in } (-1,1) \\ u(-1) = 0, \ \frac{\mathrm{d}u(1)}{\mathrm{d}x} = 0 \end{cases}$$

mit einer Chebyshev-Tau-Methode.

2.

Wir betrachten ein Sturm-Liouville-Problem

$$\begin{cases} Ly + \lambda r y = 0 \text{ in } [a,b] \\ B_1 y(a) = 0, \ B_2 y(b) = 0 \end{cases}$$

mit $Ly := (p(x)y')' + q(x)y, \ B_1 y(a) = \alpha y(a) + \beta p(a) y'(a), \ B_2 y(b) = \gamma y(b) + \delta p(b) y'(b)$ und $p \in \mathcal{C}^1([a,b]), p(x) > 0$ auf $[a,b]$, $q \in \mathcal{C}^0([a,b])$, $r \in \mathcal{C}^0([a,b])$, $r(x) > 0$. Wir haben auch $|\alpha| + |\beta| > 0$ und $|\gamma| + |\delta| > 0$.

a) Zeigen Sie, dass die Eigenwerte λ reell sind.

b) Zeigen Sie, dass die Eigenwerte λ einzeln sind.

c) Seien $y(x)$ eine Eigenfunktion für die Eigenwerte λ und $z(x)$ eine Eigenfunktion für die Eigenwerte μ mit $\mu \neq \lambda$. Dann

$$\int_a^b y(x) z(x) r(x) \mathrm{d}x = 0.$$

d) Betrachten Sie

$$y''(x) + \lambda y = 0, \ y(0) = 0, \ y(1) = 0.$$

Berechnen Sie λ_k und $y_k(x)$.

3.

Zeigen Sie, dass

$$\int_{-1}^{1} T_n(x) T_m(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x = \begin{cases} \pi & \text{falls } n = m = 0 \\ \pi/2 & \text{falls } n = m \neq 0 \\ 0 & \text{falls } n \neq m. \end{cases}$$

4.

a) Zeigen Sie, dass die Quadratur-Formel

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x \approx \frac{\pi}{N}\sum_{k=1}^{N} f(c_k) \text{ mit } c_k = \cos\Big(\frac{(2k-1)\pi}{2N}\Big) \tag{1}$$

exakte für alle Polynome $f(x)$ vom Grad $\leq 2N-1$.

Hinweis: *Zeigen Sie* (1) *für die Chebyshev-Polynome* $T_0(x), T_1(x), \ldots, T_{2N-1}(x)$.

b) Setzen Sie $x = \cos(t)$ in (1). Welche Quadratur-Formel bekommen wir?