Serie 8

1.

Sei $\|\cdot\|_{N,\omega}$ die diskrete Norm für die Chebyshev-Gauss-Lobatto Quadraturformel mit $x_j = \cos\frac{\pi j}{N}$ und $\omega_j = \frac{\pi}{\bar{c}_j}N$ für $j = 0, \ldots, N$.

Zeigen Sie die folgenden Ungleichungen:

$$\|u\|_{L^2_\omega(-1,1)} \leq \|u\|_{N,\omega} \leq \sqrt{2}\|u\|_{L^2_\omega(-1,1)} \quad \forall u \in \mathcal{P}_N(-1,1).$$

2.

Sei $P_N u(x) = \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} \hat{u}_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k\,x}$ ein trigonometrisches Polynom einer glatten Funktion u.

1) Zeigen Sie, dass $(P_N u)' = P_N u'$.
2) Zeigen Sie, dass

$$(I_N u)'_j = (\mathcal{D}_N u)_j = \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} \tilde{u}_k^{(1)} \mathrm{e}^{2\mathrm{i}kj\pi/N} \text{ für } j = 0, 1, \ldots, N-1,$$

wobei $\tilde{u}_k^{(1)} = \mathrm{i}k\tilde{u}_k = \frac{\mathrm{i}k}{N}\sum_{\ell=0}^{N-1} u(x_\ell)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}k\ell\pi/N}$ für $k = -N/2, \ldots, N/2-1$ und $I_N u(x) := \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} \tilde{u}_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ der $N/2$-Interpolant von u durch $x_j = \frac{2\pi j}{N}$, $j = 0, \ldots, N-1$.

3) Mit (2) zeigen Sie, dass

$$(\mathcal{D}_N u)_j = \sum_{\ell=0}^{N-1} (D_N)_{j\ell}\, u_\ell \text{ mit } (D_N)_{j\ell} = \frac{1}{N}\sum_{k=-N/2}^{N/2-1} \mathrm{i}k\mathrm{e}^{2\mathrm{i}k(j-\ell)\pi/N}.$$

4) Zeigen Sie, dass $(D_N)_{j\ell} = \Psi'_\ell(x_j)$ mit dem Lagrange-Polynom $\Psi_\ell(x) = \frac{1}{N}\sum_{k=-N/2}^{N/2-1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-x_\ell)}$.

3.

Sei $\{x_j\}_{j=0}^N$ die Chebyshev-Gauss-Lobatto Knoten. Zeigen Sie, dass

$$\Psi_\ell(x) = \frac{(-1)^\ell (x^2-1) T'_N(x)}{\bar{c}_\ell N^2 (x - x_\ell)}$$

ein Interpolationspolynom ist (d.h. $\Psi_\ell(x_j) = \delta_{\ell j}$).

4.

(*Chebyshev-Ableitung im physikalischen Raum*)

a) Sei $\{x_j\}_{j=0}^N$ die Chebyshev-Gauss-Lobatto Knoten. Programmieren Sie die Ableitungsmatrix D_N von $(\mathcal{D}_N u) = (I_N u)'$ mit $(\mathcal{D}_N u)(x_j) = \sum_{\ell=0}^{N} (D_N)_{j\ell} u(x_\ell)$ für $j = 0, \ldots, N$.

b) Plotten Sie die Chebyshev-Ableitungen (mit $N = 20$ z.B.) und die Fehler ($N = 0, \ldots, 50$) für die folgenden Funktionen:

$$f(x) = \mathrm{e}^x \sin(5x), g(x) = x^{10}, h(x) = |x^3| \quad x \in [-1, 1].$$

5.

Wir betrachten das Problem

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{\partial u}{\partial t} & = & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ in } (-1, 1) \\ u(-1, t) & = & u(1, t) = 0 \\ u(x, 0) & = & f(x). \end{array} \right.$$

Geben Sie ein Chebyshev-Galerkin Ansatz, um die numerische Lösung $u^N(x, t) = \sum_{k=0}^{N} a_k(t) \phi_k(x)$ zu finden.

Hinweis: $\phi_k = T_{k+1} - T_{k-1}, k \geq 1$. *Aber warum?*