Serie 9

1.

Wir möchten zeigen, dass $\int_{-1}^{1} L_n^2(x)\mathrm{d}x = (n+\frac{1}{2})^{-1}$.

a) Beweisen Sie zuerst die *Formel von Rodrigues*

$$L_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\Big((1-x^2)^n\Big).$$

Hinweis: Zeigen Sie, dass $\int_{-1}^{1} \frac{d^n}{dx^n}((1-x^2)^n)p(x)dx = 0$ *für alle Polynome* $p(x)$ *vom Grad* $\leq n-1$. *Dann folgt* $\frac{d^n}{dx^n}\Big((1-x^2)^n\Big) = C \cdot L_n(x)$. *Bestimmen Sie die Konstante* C *mit* $L_n(1) = 1$.

b) Zeigen Sie, dass der Leitkoeffizient k_n von $L_n(x)$ der folgenden Gleichung genügt:

$$k_n = \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}.$$

c) Verwenden Sie die Formel von Rodrigues, um $\int_{-1}^{1} L_n^2(x)\mathrm{d}x$ mit partieller Integration zu berechnen.
Hinweis: $\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx = 2\int_{0}^{1}(1-x^2)^n dx = 2\int_{0}^{\pi/2}(\sin(\theta))^{2n+1}d\theta = \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}$.

2.

Zeigen Sie, dass

$$(1-x^2)L_k'(x) = kL_{k-1}(x) - kxL_k(x), \;\; k \geq 1.$$

3. (*Methode der Bisektion*)

a) Schreiben Sie eine Matlab-Funktion `mylegendre(k,x)`, die $L_k(x)$ mit Hilfe der Rekursionsformel berechnet.

b) Schreiben Sie eine Matlab-Funktion `mylegendreprime(k,x)`, die $L_k'(x)$ berechnet.

c) Schreiben Sie eine Matlab-Funktion `nslegendre(k,a,b)`, die die Nullstelle von $L_k(x)$ in $[a, b]$ findet (Bisektion).

d) Schreiben Sie eine Matlab-Funktion `[knoten,gewichten]=kngeGauss(N)`, die die Knoten und die Gewichten von der Gauss-Quadraturformel vom Grad $2N + 2$ berechnet.

Hinweis: Die Knoten x_j sind die Nullstellen von L_{N+1} (benutzten Sie a) und c)). Die Gewichten sind gegeben durch $2/((1 - x_j^2)(L'_{N+1}(x_j)))^2$ (benutzen Sie b)).

Ergebnis ($N = 1$): Knoten:± 0.57735. Gewichten 1 und 1.

e) Schreiben Sie eine Matlab-Funktion `[knoten,gewichten]=kngeGaussLobatto(N)`, die die Knoten und die Gewichten von der Gauss-Lobatto-Quadraturformel vom Grad $2N$ berechnet.

Hinweis: Hierbei benutzen Sie eine neue Matlab-Funktion `nslegendreprime(k,a,b)` für die Knoten und `mylegendre(k,x)` aus a) für die Gewichten. Die Knoten x_j sind -1, 1 und die Nullstellen von L'_N. Die Gewichten $2/(N(N+1))1/(L_N(x_j))^2$ (ausser für das Erste und Letzte: $2/(N(N+1))$).

Ergebnis ($N = 2$): Knoten:$-1, 0, 1$. Gewichten $1/3, 4/3, 1/3$.

f) Berechnen Sie $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x$ mit $f(x) = \mathrm{e}^{-(\pi x)^2} \cos(\pi^2 x)$ durch Gauss- bzw. Gauss-Lobatto-Quadratur.