Serie 1

1.

Beweisen Sie

- $c_k = \frac{1}{2}(a_k - \mathrm{i}b_k)$ und $c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + \mathrm{i}b_k)$.
  Oder gleichermassen:
  $a_k = c_k + c_{-k}$ und $b_k = \mathrm{i}(c_k - c_{-k})$.
- Falls f gerade ist, dann hat man $c_{-k} = c_k$ und $b_k = 0$. Wie berechnet man a_k ?
- Falls f ungerade ist, dann hat man $c_{-k} = -c_k$ und $a_k = 0$. Wie berechnet man b_k ?

2.

Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten c_k (oder a_k und b_k) für die Folgende Funktion

$$f(x) = \frac{x}{2}, \qquad \text{für} \qquad |x| < \pi.$$

3.

Beweisen Sie, dass

$$|c_k| \leq \frac{Konst}{|k|}$$

für eine Treppen Funktion

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} y_j \chi_{[x_{j-1}, x_j]},$$

mit einem festen n, real Zahlen y_j, und $\chi_{[a,b]}$ die Charakteristische Funktion.

4.

Beweisen Sie, dass

$$|c_k| \leq \frac{Konst}{|k|^{p+1}}$$

falls $f^{(\ell)}$ 2π-periodisch und $\mathcal{C}^1(0, 2\pi)$ für $\ell \leq p$.

5.

Beweisen Sie die Parsevalsche Gleichung

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \mathrm{d}x$$

mit Hilfe von dem Satz von Weierstrass:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \text{ ein trigonometrisches Polynom } T_n \text{ so, dass } |f - T_n| \leq \varepsilon.$$