Serie 10

1.

Zeigen Sie, dass der Operator

$$\begin{aligned} A : L^2(-1,1) &\to L^2(-1,1) \\ u &\mapsto Au := -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big((1-x^2)u'\Big) \end{aligned}$$

selbstadjungiert in $L^2(-1,1)$ ist. D.h. $(Au, v)_{L^2(-1,1)} = (u, Av)_{L^2(-1,1)}$.

2.

a) Zeigen Sie, dass die Ableitung der Legendre-Polynome orthogonal in $L^2_\omega(-1,1)$ mit dem Gewicht $w(x) = 1 - x^2$ sind. D.h.

$$\int_{-1}^{1} L'_m(x) L'_n(x)(1-x^2)\,\mathrm{d}x = \delta_{mn}.$$

b) Zeigen Sie

$$\int_{-1}^{1} L'_m(x) L'_n(x)(1-x^2)\,\mathrm{d}x = n(n+1)\int_{-1}^{1} L_m(x) L_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

3.

Für $u \in H^m(-1,1)$, zeigen Sie, dass
a) $\|u' - P_N u'\|_{L^2(-1,1)} \approx C \cdot N^{1-m}$.
b) $\|u' - (P_N u)'\|_{L^2(-1,1)} \approx C \cdot N^{3/2-m}$.
c) Falls $u \in H^1(-1,1)$ und $u \notin H^2(-1,1)$, hat man

$$P_N u \longrightarrow u \ (\text{für } N \to \infty) \qquad \text{und} \qquad (P_N u)' \not\longrightarrow u' \ (\text{für } N \to \infty).$$

4.

Um zu zeigen, dass es zwischen zwei konsekutiven Nullstellen von L_{n-1} eine Nullstelle von L_n gibt, benutzen Sie den Satz von Sturm (1836):
Seien

$$\begin{aligned} (p(x)y')' + q(x)y &= 0 \\ (\hat{p}(x)\hat{y}')' + \hat{q}(x)\hat{y} &= 0 \end{aligned}$$

mit $p, \hat{p} \in \mathcal{C}^1(-1,1)$ *und* $q, \hat{q} \in \mathcal{C}^0(-1,1)$. *Wir nehmen noch an, dass* $\hat{q}(x) \geq q(x)$ *und* $0 < \hat{p}(x) \leq p(x)$ *für* $x \in [a,b]$.
Falls die Lösungen y *und* $\hat{y}$ *linear unabhängig sind und falls* $y(x_1) = y(x_2) = 0$ *mit* $x_1 < x_2$, *dann existiert* $x_3 \in (x_1, x_2)$ *so, dass* $\hat{y}(x_3) = 0$.
(Für einen Beweis sehen Sie *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, W. Walter, Springer 1990. Seite 290.)

Alternative: Benutzen Sie

$$L_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1} x L_n(x) - \frac{n}{n+1} L_{n-1}(x)$$

und eine Rekursion.

5. **Für Markus und Maximilian**

Kurze Präsentation der KdV Gleichung (Kortweg und de Vries).

Hinweis: *Geschichte; Existenz der Lösung; Soliton; Spektral Methode für ein perisodisches Problem.*