Serie 11

1.

Beweisen Sie den folgenden Satz:
Für alle Polynome $p_N \in \mathbb{P}_N(-1,1)$ gilt

$$\|p_N\|^2_{L^2(-1,1)} \leq \sum_{j=0}^{N} p_N^2(x_j)\omega_j \leq 3\|p_N\|^2_{L^2(-1,1)},$$

wobei $\{x_j,\, \omega_j\}_{j=0}^N$ die Knoten bzw. die Gewichten von der Legendre-Gauss-Lobatto Quadratur sind.

<u>Hinweis:</u> Benutzen Sie $\displaystyle\sum_{j=0}^{N} L_N^2(x_j)\omega_j = (2+\frac{1}{N})\|L_N\|^2_{L^2(-1,1)}$

2.

Beweisen Sie den folgenden Satz:

Für die exakte Lösung $u \in H^m(\Omega)$ des Problems

(P) *finde* $u \in H_0^1(\Omega)$ *so, dass* $a(u,v) = b(v)\ \forall v \in H_0^1(\Omega)$ *(mit* $a(u,v) = (\nabla u, \nabla v), b(v) = (f,v)$ *und* $f \in H^r(\Omega)$*)*

gilt

$$\|u - u_N\|_{L^2(\Omega)} \leq C \cdot (N^{-m}||u||_{H^m(\Omega)} + N^{-r}\|f\|_{H^r(\Omega)}).$$

<u>Hinweis:</u> Wir haben $\|u-u_N\|_{L^2(\Omega)} = \sup_{t\in L^2(\Omega)} \dfrac{\int_\Omega (u(x)-u_N(x))t(x)\,\mathbf{d}x}{\|t\|_{L^2(\Omega)}}$. *Für* $t \in L^2(\Omega)$ *betrachten wir das Problem:*
finde $\omega \in H_0^1(\Omega)$ so, dass $a(v,\omega) = \int_\Omega t(x)v(x)\,\mathbf{d}x\ \forall v \in H_0^1(\Omega)$.
(Es gelten $\omega \in H^2(\Omega)$ *und* $\|\omega\|_{H^2(\Omega)} \leq C\|t\|_{L^2(\Omega)}$ *(o.B.)).*

3.

Wir lösen das Poisson-Problem in 2D

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} &= 10\sin(8x(y-1)) \quad \text{in } \Omega := (-1,1)\times(-1,1), \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

mit einer Chebyschev-Spektralmethode. Durch Diskretisierung erhalten wir eine Gleichung $L_N u = f$ auf dem Lobatto-Gitter.

a) Berechnen Sie den diskreten Laplace-Operator L_N mit der Hilfe von dem Tensor-Produkt.

b) Implementieren Sie das Problem.

<u>*Hinweis:*</u> *Wir berechnen ω_{pq} die Ableitungen von u nach x an* **GLL**-*Knoten (x_p, x_q):*

$$\omega_{pq} := \frac{\partial u}{\partial x}(x_p, x_q) = \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N} u_{ij}\ell_i'(x_p)\ell_j(x_q) = \sum_{i=0}^{N} u_{iq}\ell_i(x_p)$$

mit den Lagrange-Polynomen $\ell_j(x)$.
In der Matrix-Vektor-Schreibweise bekommen wir:

$$\omega = D_x u := \begin{pmatrix} \widehat{D}_x & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \widehat{D}_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{00} \\ u_{10} \\ \vdots \\ u_{NN} \end{pmatrix}$$

mit der Chebyschev-Ableitungsmatrix $\widehat{D}_x$ (siehe Aufgabe 4 in der Serie 8). Die Komponenten von $\widehat{D}_x$ werden nach jeden Spalten mit dem Vektor $(u_{0j}, u_{1j}, \ldots, u_{Nj})^\top$, $j = 0, \ldots, N$ geordnet. Wir haben $D_x = I \otimes \widehat{D}_x$ und $D_y = \widehat{D}_y \otimes I$, wobei das Symbol $\otimes$ das Kronecker-Tensorprodukt bezeichnet (es gibt ein Befehl **`kron`** *in Matlab).*

<u>**Def.**</u> (Kronecker-Tensorprodukt)
Unter einem Kronecker-Tensorprodukt $A \otimes B$ von den Matrizen $A \in Mat(k, \ell)$ und $B \in Mat(m, n)$ versteht man eine Matrix $C = A \otimes B \in Mat(km, \ell n)$ mit

$$C = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1\ell}B \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{k1}B & \cdots & \cdots & a_{k\ell}B \end{pmatrix}$$

<u>4.</u> Für Magdalena und Wanja

Kurze Präsentation der Schrödinger-Gleichung.

<u>*Hinweis:*</u> *Geschichte; Anwendung (Glasfaser); Lösung; Soliton; Wellenpacket; Fourier-Kollokationsmethode (zeitabhängiges Problem, periodische RB).*