Serie 12

1.

Zeigen Sie die folgende Ungleichung

$$|u_N|_{H^1(\Omega)} \le c \cdot \|\mathcal{I}_N f\|_{L^2(\Omega)}$$

für die Lösung u_N von dem diskreten Poisson Problem

$$a_N(u_N, v_N) = b_N(v_N) \text{ für alle } v_N \in \mathbb{Q}_N^0.$$

Hinweis: Siehe Aufgabe 1. *in der Serie* 11, *Satz* 1 *in* §*8 aus der Vorlesung und die Poincaré-Friedrich-Ungleichung:*

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \le c \cdot |v|_{H^1(\Omega)} \; \textit{für } v \in H_0^1(\Omega).$$

2.

Wir betrachten die Poisson-Gleichung

$$(\mathbf{P}) \begin{cases} -\Delta u &= f \quad \text{in } \Omega = (-1,1) \times (-1,1), \\ \quad u &= g \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

Die inhomogene Dirichlet-Randbedingung (1) wird durch die Zerlegung $\tilde{u} = u - g$ zur homogenen Dirichlet-Randbedingung $\tilde{u}$ auf $\partial\Omega$ mit $\tilde{u} \in H_0^1(\Omega)$. Dann lautet die schwache Form von **(P)** wie folgt:

$$(\mathbf{S}) \text{ suche } u \in H^1(\Omega) \text{ mit } \tilde{u} = u - g \in H_0^1(\Omega) \text{ so, dass } a(u,v) = b(v), \; \forall\, v \in H_0^1(\Omega).$$

Nun betrachten wir das folgende diskrete Problem von **(S)**:
(**D**)

$$\text{suche } u_N \in \mathbb{Q}_N(\Omega) \text{ mit } \tilde{u}_N = u_N - \mathcal{I}_N g \in \mathbb{Q}_N^0(\Omega) \text{ so, dass}$$
$$a_N(u_N, v_N) = b_N(v_N), \; \forall\, v_N \in \mathbb{Q}_N^0(\Omega).$$

Hierbei gilt $u_N(x,y) = \sum_{i,j=0}^{N} u_{ij} \ell_i(x) \ell_j(y)$, mit Lagrange-Polynome ℓ_i.

Finden Sie das resultierende Gleichungssystem $A\mathbf{u} = F$ mit der Steifigkeitsmatrix A bzgl. $a_N(\ell_i \otimes \ell_j, \ell_r \otimes \ell_s)$ für (i,j), $(r,s) \in \mathcal{L}_0$, der Lösung $\mathbf{u} = (u_{ij})$ für $(i,j) \in \mathcal{L}_0$ und der rechten Seite $F = f(x_r, x_s)\omega_r\omega_s - \sum_{(i,j)\in\mathcal{M}} g_{ij} a_N(\ell_i \otimes \ell_j, \ell_r \otimes \ell_s)$ für $(r,s) \in \mathcal{L}_0$, wobei

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_0 &= \{(i,j) \in \{0,\dots,N\}^2 \,:\, (x_i, x_j) \in \text{GLL-Knoten} \cap \Omega\},\\
\mathcal{M} &= \{(i,j) \in \{0,\dots,N\}^2 \,:\, (x_i, x_j) \in \text{GLL-Knoten} \cap \partial\Omega\},\\
\ell_i \otimes \ell_j &= \ell_i \cdot \ell_j.
\end{aligned}$$

Hinweis: $\{\ell_r(x)\ell_s(y)\}_{r,s=1}^{N-1}$ *ist eine Basis von* $\mathbb{Q}_N^0$.

3.

Zeigen Sie, dass die Matrix

$$S := \begin{pmatrix} A & C^\top \\ C & O \end{pmatrix}$$

mit der symmetrischen und positiv definiten Matrix A *nicht positiv* bzw.*nicht negativ definit* ist.

Hinweis: Betrachten Sie $z^\top S z$ *mit* $z = \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}$ *oder* $\begin{pmatrix} A^{-1}C^\top q \\ -q \end{pmatrix}$.

4.

Für Elena, Samuel und Balthasar

Kurze Präsentation der Burger-Gleichung:

$$u_t + uu_x - \nu u_{xx} = 0, \;\; \nu > 0.$$

Hinweis: Geschichte; exakte Lösung; Fourier-Kollokationsmethode auf $(0, 2\pi)$ *mit periodischen Randbedingung; oder Chebyshevkollokationsmethode auf* $(-1, 1)$ *(*$u(-1,t) = u(1,t) = 0$, $u(x,0) = -\sin(\pi x)$*).*