Zusammenfassung: Kapitel 1. Grundtechniken: Fourier, FFT, DCT und JPEG

- Sei $f : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$ eine 2π-periodische Funktion. Die *Fourierreihe von f* ist gegeben durch
$$f \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$$
mit den *Fourierkoeffizienten*
$$c_k = \hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \mathrm{d}x.$$

- Falls die Funktion genug glatt ist, dann fallen die Fourierkoeffizienten sehr schnell ab:
$$|c_k| \leq \frac{Konst}{|k|^{p+1}}.$$

- Gibbsches Phänomen: Verhalten der Fourierreihe einer unstetigen Funktion.

- Konvergenz im quadratischen Mittel.

- Die *Fourier-Transformation von f* ist
$$\begin{aligned} \hat{f} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ k &\longmapsto \hat{f}(k), \end{aligned}$$
mit
$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt} \mathrm{d}t.$$
Für die Inverse-Fourier-Transformation von $\hat{f}$ hat man
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \mathrm{d}x.$$
Eigenschaften:
$$\widehat{f^{(\ell)}}(k) = (\mathrm{i}k)^\ell \hat{f}(k), \quad \widehat{f * g}(k) = \sqrt{2\pi} \hat{f}(k) \cdot \hat{g}(k),$$
mit der *Faltung*
$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) g(y) \mathrm{d}y.$$

- Für eine Ganzzahl N definieren wir eine Gitter
$$x_\ell = \frac{2\pi\ell}{N}, \text{ für } \ell = 0, 1, \ldots, N-1.$$
Die *diskrete Fourier Transformation (DFT)* von einer N-periodischen Folge y ist gegeben durch $z = \mathcal{F}_N(y)$ mit
$$z_k = \frac{1}{N}\sum_{\ell=0}^{N-1} y_\ell \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx_\ell} = \frac{1}{N}\sum_{\ell=0}^{N-1} y_\ell \omega^{-k\ell},$$
für $k = 0, \ldots, N-1$.
Die Umkehrabbildung von $\mathcal{F}_N$ ist $\mathcal{F}_N^{-1} = N\overline{\mathcal{F}}_N$ (*IDFT*) mit
$$(\overline{\mathcal{F}}_N z)_k = \frac{1}{N}\sum_{\ell=0}^{N-1} z_\ell \omega^{k\ell}.$$
- Mit dem *Aliasing-Satz*, kann man zeigen, dass für f p-mal st. diff. ($p \geq 2$) und 2π-periodisch gilt
$$\hat{f}_N(k) - \hat{f}(k) = \mathcal{O}(N^{-p}),$$
für die diskrete Fourierkoeffizienten $\hat{f}_N(k)$.
- Das trigonometrische Polynom durch (x_ℓ, y_ℓ) (für $\ell = 0, 1, \ldots, N-1$, mit N gerade) ist gegeben durch
$$p_N(x) = {\sum_{k=-N/2}^{N/2}}' z_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} = \frac{1}{2}\left(z_{-N/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Nx/2} + z_{N/2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}Nx/2}\right) + \sum_{|k|<N/2} z_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx},$$
wo $z = \mathcal{F}_N(y)$.
- Seien $u = (u_0, \ldots, u_{N-1}) \in \mathrm{P}_N$, $v = (v_0, \ldots, v_{N-1}) \in \mathrm{P}_N$ und $y = (u_0, v_0, \ldots, u_{N-1}, v_{N-1}) \in \mathrm{P}_{2N}$. Dann, für $k = 0, 1, \ldots, N-1$ haben wir
$$\begin{aligned} 2N(\mathcal{F}_{2N}y)_k &= N(\mathcal{F}_N u)_k + \omega_{2N}^{-k} N(\mathcal{F}_N v)_k \\ 2N(\mathcal{F}_{2N}y)_{k+N} &= N(\mathcal{F}_N u)_k - \omega_{2N}^{-k} N(\mathcal{F}_N v)_k \end{aligned}$$
mit $\omega_{2N} = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/(2N)} = \mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}/N}$.
Es folgt: Falls $N = 2^m$, kann man $\mathcal{F}_N y$ mit $\mathcal{O}(N\log_2 N)$ komplexen Multiplikationen und Additionen berechnen (*FFT*).
- Die *diskrete-Kosinus-Transformation* (DCT) von $(y_\ell)_{\ell=0}^{N-1}$ ist gegeben durch
$$z_k = \frac{2}{N}\sum_{\ell=0}^{N-1} y_\ell \cos(kx_\ell) \quad \text{für} \quad k = 0, \ldots, N-1,$$
mit $x_\ell = \dfrac{(2\ell+1)\pi}{2N}$.
- Pixels; Bild; Farbe (RGB); grauen Farbton (Gray scale); DCT in $\mathbb{R}^2$.
- Ideen von JPEG:
Bild $\to$ Zerlegung in Block von 8×8 Pixels $\to$ DCT $\to$ Quantisierung $\to$ Zick-Zack $\to$ Kodierung.