

Zusammenfassung: Kapitel 2. Intermezzo: Spektralmethoden: Einführung

- Ziel: Approximation der exakten Lösung $u := u(x, t)$ einer PDG

$$\mathcal{L}u = f \quad \text{mit RB+AW,}$$

wobei \mathcal{L} ein Operator (z.B. $\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}$) ist. $u(x, t)$ ist durch ein algebraisches Polynom $u^N(x, t)$ vom Grad N approximiert.

- Im wesentlichen gibt es 4 Typen von Spektralmethoden (SM): Galerkin (G), Kollokation oder Pseudospektral (K), Tau (T), Galerkin mit numerischer Integration (G-NI).
- Fourier-Galerkin SM (für ein periodisches Problem in $[0, 2\pi]$):

Suche $u^N(x, t) = \sum_{\ell=-N/2}^{N/2} a_\ell(t)\phi_\ell(x)$ so, dass das *Residuum* $R^N(x, t) = \mathcal{L}u^N - f$ orthogonal zur $\text{span}\{\psi_k\}_{k=-N/2}^{N/2}$ ist. D.h.

$$\int_0^{2\pi} R^N(x, t)\psi_k(x)dx = 0 \quad \text{für } k = -N/2, \dots, N/2.$$

Wir nennen die Funktion ϕ_ℓ die *Wichtungsfunktion* (trial function), a_ℓ die *Koeffizienten der Entwicklung*, ψ_k die *Test-Funktion* (test function).

Um einen *Fourier*-Ansatz zu bekommen, wählen wir

$$\phi_\ell(x) = e^{i\ell x} \quad \text{und} \quad \psi_k(x) = \frac{1}{2\pi}e^{-ikx}.$$

Um die Koeffizienten $a_\ell(t)$ zu bestimmen, muss man eine GDG (falls \mathcal{L} von der Zeit abhängt) oder ein algebraisches System (falls \mathcal{L} nicht von der Zeit abhängt) noch lösen.

- Chebyshev-Kollokation SM (für ein Problem in $[-1, 1]$ mit hom. Dirichlet RB):

Suche $u^N(x, t) = \sum_{\ell=0}^N a_\ell(t)\phi_\ell(x)$ so, dass die PDG an gegebene *Kollokation-Punkten* $x_j \in (-1, 1)$ erfüllt ist:

$$\mathcal{L}u^N(x_j, t) = f \quad \text{für } j = 1, \dots, N-1.$$

Wir bekommen einen *Chebyshev*-Ansatz, falls

$$\phi_\ell(x) = T_\ell(x) = \cos(\ell \arccos(x)) \quad \text{und} \quad x_j = \cos\left(\frac{\pi j}{N}\right).$$

Wie früher, muss man noch eine GDG, bzw. ein algebraisches System, lösen, um die Koeffizienten a_ℓ zu bestimmen.

- Chebyshev-Tau SM (für ein Problem in $[-1, 1]$):

Suche $u^N(x, t) = \sum_{\ell=0}^N a_\ell(t) \phi_\ell(x)$ so, dass das *Residuum* R^N orthogonal zur $\text{span}\{\psi_k\}_{k=0}^{N-2}$ ist. D.h.

$$\int_{-1}^1 R^N(x, t) \psi_k(x) \omega(x) dx = 0 \text{ für } k = 0, \dots, N-2,$$

mit ω einer Gewichtsfunktion. Die 2 letzten Bedingungen bestimmen wir mit der Hilfe von der RB.

- Galerkin mit numerischer Integration:

Wir betrachten die *schwache Formulierung* einer PDG mit einem Galerkin-Ansatz. Daher hat man die folgende Gleichung:

$$a(u, \psi_k) = b(\psi_k) \text{ für } k = 0, \dots, N,$$

mit $a(\cdot, \cdot)$ bilinear und $b(\cdot)$ linear. Da die Integralen in a und b oft kompliziert sind, benutzt man eine *Quadratur-Formel*, um sie zu approximieren. Es folgt:

$$a_N(u^N, \psi_k) = b_N(\psi_k) \text{ für } k = 0, \dots, N,$$

mit $a_N(\cdot, \cdot) \approx a(\cdot, \cdot)$ und $b_N(\cdot) \approx b(\cdot)$ durch eine Gauss-Lobatto QF (z.B.).

Wir nehmen jetzt $\phi_k = \psi_k$ und bekommen eine GDG, bzw. ein Gleichungssystem, für die Koeffizienten a_k .