Zusammenfassung: Kapitel 3. Interpolation, Approximation und Quadratur Formeln

- Definition von $L^2_\omega(-1,1)$ und Sobolev-Räume $H^s_\omega(-1,1)$ mit Normen:

$$||f||_{L^2_\omega(-1,1)} = \Big(\int_{-1}^{1} |f(x)|^2 \omega(x) \mathrm{d}x\Big)^{1/2},$$

$$||f||_{H^s_\omega(-1,1)} = \Big(\sum_{\ell=0}^{s} ||f^{(\ell)}||_{L^2_\omega(-1,1)}\Big)^{1/2}.$$

- Orthogonale Polynome: Die *Jacobi-Polynome* $\phi_k(x) = P_k^{(\alpha,\beta)}(x)$ vom Grad k sind die Eigenfunktionen des singuläres Sturm-Liouville-Problems

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(r(x)u'(x)\big) + \lambda\omega(x)u(x) = 0$$

mit $r(x) = (1-x)^{1+\alpha}(1+x)^{1+\beta}$ und dem *Gewicht* $\omega(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$.

Beispiel: $\alpha = \beta = 0 \Rightarrow$ Legendre-Polynome $\phi_k = L_k$. $\alpha = \beta = 1/2 \Rightarrow$ Chebyshev-Polynome $\phi_k = T_k$.

Das Jacobi-System $\{\phi_k\}_{k=0}^\infty$ ist eine orthogonale Basis der Raum $L^2_\omega(-1,1)$: Für $u \in L^2_\omega(-1,1)$ hat man

$$\begin{aligned} Su : &= \sum_{k=0}^{\infty} \hat{u}_k\phi_k, \text{ mit den Jacobi-Koeff. } \hat{u}_k = \frac{1}{||\phi_k||^2_{L^2_\omega}}(u,\phi_k)_{L^2_\omega}, \\ P_N u : &= \sum_{k=0}^{N} \hat{u}_k\phi_k. \end{aligned}$$

$P_N u$ ist auch *die orthogonale Projektion* von u auf $\mathbb{P}_N(-1,1)$:

$$(P_N u, v)_{L^2_\omega} = (u,v)_{L^2_\omega} \ \forall\, v \in \mathbb{P}_N(-1,1).$$

Beispiel: $||L_k||^2_{L^2} = (k+\frac{1}{2})^{-1}$. $||T_k||^2_{L^2_\omega} = c_k\frac{\pi}{2}$ mit $c_0 = 2$, $c_k = 1$ sonst.

- *Quadratur Formeln*

$$\int_{-1}^{1} f(x)\omega(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{j=0}^{N} f(x_j)\omega_j,$$

mit den *Knoten* x_j und den *Gewichten* ω_j.

(1) Gauss-QF: Knoten=Nullstellen von ϕ_{N+1}, exakt für $p \in \mathbb{P}_{2N+1}$.
Beispiel: Chebyshev: $x_j = \cos(\frac{(2j+1)\pi}{2N+2})$, $\omega_j = \frac{\pi}{N+1}$. Legendre: Nullstellen->Bisektion, $\omega_j = \frac{2}{(1-x_j^2)(L'_{N+1}(x_j))^2}$.

(2) Gauss-Radau QF: Knoten=Nullstellen von $\phi_{N+1} + a\phi_N$, exakt für $p \in \mathbb{P}_{2N}$.
Beispiel: Chebyshev: $x_j = \cos(\frac{2\pi j}{2N+1})$, $\omega_0 = \frac{\pi}{2N+1}$, $\omega_j = \frac{2\pi}{2N+2}$ sonst. Legendre: $\omega_0 = \frac{2}{(N+1)^2}$, $\omega_j = \frac{1-x_j}{(N+1)^2(L_N(x_j))^2}$ sonst.

(3) Gauss-Lobatto QF: Knoten=Nullstellen von $(1-x^2)\phi'_N$, exakt für $p \in \mathbb{P}_{2N-1}$.
Beispiel: Chebyshev: $x_j = \cos(\frac{\pi j}{N})$, $\omega_j = \frac{\pi}{\bar{c}_j N}$, mit $\bar{c}_j = 2$ für $j = 0, N$ und $\bar{c}_j = 1$ sonst. Legendre: $\omega_j = \frac{2}{N(N+1)(L_N(x_j))^2}$.

Diskretes Skalarprodukt $(u,v)_N = \sum_{j=0}^{N} u(x_j)v(x_j)\omega_j$ und zugehörige Norm $||u||_N = \sqrt{(u,u)_N}$.

- Für eine stetige Funktion u definieren wir das *Interpolationspolynom* $I_N u$ durch die Knoten $\{x_j\}_{j=0}^{N}$ (d.h. $I_N u$ Polynom vom Grad N mit $I_N u(x_j) = u(x_j)$).
  Wir haben
  $$I_N u = \sum_{\ell=0}^{N} \tilde{u}_\ell \phi_\ell,$$
  mit den diskreten Koeff. $\tilde{u}_\ell = \frac{1}{\gamma_\ell}(u, \phi_\ell)_N$ und $\gamma_\ell = ||\phi_\ell||_N^2$.
  Beispiel: Chebyshev: $\gamma_\ell = \frac{\pi}{\bar{c}_\ell}$. Legendre (Lobatto): $\gamma_\ell = (\ell + \frac{1}{2})^{-1}$ für $\ell < N$ und $\gamma_N = \frac{2}{N}$.

- *Ableitung* im physikalischen Raum (für Gauss-Lobatto Knoten): Für $I_N u = \sum_{\ell=0}^{N} u(x_\ell)\Psi_\ell$, Ψ_ℓ Lagrange-Polynome, die Ableitung ist gegeben durch
  $$\mathcal{D}_N u := (I_N u)', \text{ mit } \mathcal{D}_N u(x_j) = \sum_{\ell=0}^{N} (D_N)_{j\ell} u(x_\ell) \text{ für } j = 0, \ldots, N.$$
  Man hat explizite Formeln für die Ableitungsmatrix D_N für Chebyshev und Legendre Polynome.

- Fehlerabschätzung für $P_N u$ in $\Omega = (-1,1) \times (-1,1)$:
  $$\begin{aligned} u \in H_\omega^m(\Omega) &\Rightarrow ||u - P_N u||_{L_\omega^2(\Omega)} \leq CN^{-m}||u||_{H_\omega^m(\Omega)} \\ u \in H_\omega^m(\Omega) \cap H_{\omega,0}^1(\Omega) &\Rightarrow ||u - P_N^{1,0} u||_{L_\omega^2(\Omega)} \leq CN^{-m}||u||_{H_\omega^m(\Omega)} \\ u \in H_\omega^m(\Omega) \cap H_{\omega,0}^1(\Omega) &\Rightarrow |u - P_N^{1,0} u|_{H_\omega^1(\Omega)} \leq CN^{1-m}||u||_{H^m\omega(\Omega)}, \end{aligned}$$
  mit $\omega(x) = (1-x_1^2)^{-1/2}(1-x_2^2)^{-1/2}$ für Chebyshev und $\omega(x) = 1$ für Legendre. ($P_N^{1,0}$ ist die Projektion in $\mathbb{Q}_N^0$).

- Fehler Abschätzung für $I_N u$ in $\Omega = (-1,1) \times (-1,1)$:
  $$\begin{aligned} u \in H_\omega^m(\Omega) &\Rightarrow ||u - I_N u||_{L_\omega^2(\Omega)} \leq CN^{-m}||u||_{H_\omega^m(\Omega)} \\ u \in H_\omega^m(\Omega) &\Rightarrow |u - I_N u|_{H_\omega^1(\Omega)} \leq CN^{1-m}||u||_{H_\omega^m(\Omega)}. \end{aligned}$$

- Legendre-Spektral-Diskretisiereung der Poisson-Gleichung:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \text{ in } \Omega \\ u &= 0 \text{ auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

  Die schwache Formulierung lautet

$$\begin{aligned} &\text{Suche } u \in H_0^1(\Omega) \text{ so, dass} \\ &a(u,v) = b(v) \;\; \forall \;\; v \in H_0^1(\Omega), \end{aligned} \tag{1}$$

  mit $a(u,v) = \displaystyle\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v$ und $b(v) = \displaystyle\int_\Omega fv.$
  Ein Galerkin-Ansatz liefert das diskrete Problem

$$\begin{aligned} &\text{Suche } u_N \in \mathbb{Q}_N^0(\Omega) \text{ so, dass} \\ &a_N(u_N, v_N) = b_N(v_N) \;\; \forall \;\; v_N \in \mathbb{Q}_N^0, \end{aligned} \tag{2}$$

  mit $a_N(\cdot,\cdot)$, bzw. $b_N(\cdot)$, Approximation von $a(\cdot,\cdot)$, bzw. $b(\cdot)$, durch die Gauss-Legendre-Lobatto QF.

  Mit Hilfe vom Strangschen Lemma und vom Aubin-Nitsche Trick bekommt man die optimale Fehlerabschätzungen falls u (Lösung von (1)) in $H^m(\Omega)$ und $f \in H^r(\Omega)$ sind:

$$\begin{aligned} ||u - u_N||_{H^1(\Omega)} &\leq c\big(N^{1-m}||u||_{H^m(\Omega)} + N^{-r}||f||_{H^r(\Omega)}\big) \\ ||u - u_N||_{L^2(\Omega)} &\leq c\big(N^{-m}||u||_{H^m(\Omega)} + N^{-r}||f||_{H^r(\Omega)}\big), \end{aligned}$$

  mit u_N Lösung von (2).

  Das diskrete Problem (2) ist äquivalent zu einem Kollokationsproblem:

$$\begin{aligned} \text{Suche } u_N \in \mathbb{Q}_N^0(\Omega) &\text{ so, dass} \\ -\Delta u_N(x_k, x_\ell) = f(x_k, x_\ell) &\text{ in GitterL} \cap \Omega \\ u_N(x_k, x_\ell) = 0 &\text{ in GitterL} \cap \partial\Omega, \end{aligned}$$

  mit $\text{GitterL} = \{(x_k, x_\ell), 0 \leq k, \ell \leq N\}$ die Menge von Gauss-Legendre-Lobatto Knoten.

- Ein bisschen Fluiddynamik. Herleitung der *Kontinuitätsgleichung*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho u) = 0,$$

  der *Inkompressibilitätsbedingung*

$$\operatorname{div} u = 0,$$

  und von

$$\rho \frac{\mathrm{D}u}{\mathrm{D}t} = \operatorname{div}\sigma + \rho f \qquad \left(\text{mit } \frac{\mathrm{D}u}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\nabla u\right)$$

  für ein inkompressibeles Fluid.

  Herleitung der (entdimensionierten) *Navier-Stokes Gleichungen*

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u - \frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta u + \nabla p &= f \\ \operatorname{div} u &= 0, \end{aligned}$$

  mit u die Geschwindigkeit des Fluids, p der Druck, f eine äussere Kraft und Re die Reynolds Zahl.

- Keine Zeit für die stationäre Stokes-Gleichung und den Algorithmus von Uzawa ...