Linjär algebra II
Lösningar till övningarna
Version 2013

Kapitel 1

Övning 1.1. samt lite mer direkta konsekvenser av axiomen.

(i) Nollvektorn är entydig. Bevis. Antag att $\mathbf{0}$ och $\mathbf{0}_1$ är nollvektorer. Då gäller

$$\mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0}_1 = \mathbf{0}_1 + \mathbf{0} = \mathbf{0}_1 \ .$$

$\square$

(ii) Inversen är entydig. Bevis. Antag att $-\mathbf{v}$ och $-\mathbf{v}_1$ är inverser till $\mathbf{v}$. Då är $-\mathbf{v} + \mathbf{v} = \mathbf{0} = -\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}$. Addition med $-\mathbf{v}$ från höger ger

$$(-\mathbf{v} + \mathbf{v}) + (-\mathbf{v}) = -\mathbf{v} + (\mathbf{v} + (-\mathbf{v})) = -\mathbf{v} + \mathbf{0} = -\mathbf{v}$$
$$\text{och på samma sätt } (-\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}) + (-\mathbf{v}) = -\mathbf{v}_1 \ .$$

$\square$

(a) $0\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Bevis. $0\mathbf{v} = (0+0)\mathbf{v} = 0\mathbf{v} + 0\mathbf{v}$. Addition med $-0\mathbf{v}$ från höger ger $\mathbf{0} = 0\mathbf{v} + (-0\mathbf{v}) = (0\mathbf{v} + 0\mathbf{v}) + (-0\mathbf{v}) = 0\mathbf{v} + \mathbf{0} = 0\mathbf{v}$.

$\square$

(b) $\alpha\mathbf{0} = \mathbf{0}$. Bevis. Om $\alpha = 0$ så är det klart enligt (a). Om $\alpha \neq 0$ så är

$$\mathbf{v} + \alpha\mathbf{0} = 1\mathbf{v} + \alpha\mathbf{0} = \left(\alpha\frac{1}{\alpha}\right)\mathbf{v} + \alpha\mathbf{0} = \alpha\left(\frac{1}{\alpha}\mathbf{v} + \mathbf{0}\right) = \alpha\left(\frac{1}{\alpha}\mathbf{v}\right) = \mathbf{v} \ .$$

$\square$

(c) $(-1)\mathbf{v} = -\mathbf{v}$. Bevis. $(-1)\mathbf{v} + \mathbf{v} = (-1)\mathbf{v} + 1\mathbf{v} = (-1+1)\mathbf{v} = 0\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

$\square$

Övning 1.2. Bara exempel 12: Verifiera att $C^\infty(\mathbb{R})$ är ett vektorrum.

Vi betecknar vektorerna f, g, h etc. Additionen definieras genom $f+g$ att i punkten $x, 0 \leq x \leq 1$ är $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ och λf genom $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$. Nollvektorn är funktionen $\mathbf{0}$ definerad av $\mathbf{0}(x) = 0$, och inversen $-f$ till ges av $(-f)(x) = -f(x)$. Att axiomen gäller är nu en omedelbar följd av räknereglerna i $\mathbb{K}$.

Övning 1.3. $\mathrm{Span}(W)$ är ett delrum till V. Bevis. Detta är ”trivialt”. Vi visar bara slutenhet under addition och antar att W bara innehåller två vektorer $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$.

Låt $\mathbf{w}_1 = \alpha_1\mathbf{u}_1 + \beta_1\mathbf{u}_2$ och $\mathbf{w}_2 = \alpha_2\mathbf{u}_1 + \beta_2\mathbf{u}_2$. Då gäller $\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 = \alpha_1\mathbf{u}_1 + \beta_1\mathbf{u}_2 + \alpha_2\mathbf{u}_1 + \beta_2\mathbf{u}_2 = (\alpha_1 + \alpha_2)\mathbf{u}_1 + (\beta_1 + \beta_2)\mathbf{u}_2 \in \mathrm{Span}(W)$.

$\square$

Övning 1.4. Bevis. Igen ett trivialt påstående.

Om B är en bas så generar B och alla vektorer, speciellt nollvektorn, kan bara skrivas på ett sätt.

Omvänt gäller det att visa att varje vektor bara kan skrivas som en unik linjärkombination. Vi vet detta à priori bara för nollvektorn. Men om $\mathbf{v} = \sum \alpha_i \mathbf{b}_i = \sum \beta_i \mathbf{b}_i$ får vi $\sum(\alpha_i - \beta_i)\mathbf{b}_i = \mathbf{0}$. Det linjär oberoeendet ger $\alpha_i - \beta_i = 0$ dvs. $\alpha_i = \beta_i$ så framställningen är entydig.

□

Övning 1.5. Bevis då $n = 3$: Antag att $\lambda_1(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) + \lambda_2(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3) + \lambda_2 \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$. Då får vi $\lambda_1 \mathbf{v}_1 + (\lambda_2 - \lambda_1)\mathbf{v}_2 + (\lambda_3 - \lambda_2)\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$. Så $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 - \lambda_1 = 0$ och $\lambda_3 - \lambda_2 = 0$ med den entydiga lösningen $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

□

Övning 1.6. Bevis då $n = 3$: Låt $\mathbf{v} \in V$. Vi vet att $\mathbf{v}$ kan skrivas $\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \lambda_3 \mathbf{v}_3$ och vill hitta β_i så att $\mathbf{v} = \beta_1(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) + \beta_2(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3) + \beta_2 \mathbf{v}_3$. Detta ger $\mathbf{v} = \beta_1 \mathbf{v}_1 + (\beta_2 - \beta_1)\mathbf{v}_2 + (\beta_3 - \beta_2)\mathbf{v}_3$. Så $\beta_1 = \lambda_1$, $\beta_2 - \beta_1 = \lambda_2$ och $\beta_3 - \beta_2 = \lambda_3$. Detta ekvationssystem har den entydiga lösningen $\beta_1 = \lambda_1$, $\beta_2 = \lambda_1 + \lambda_2$ och $\beta_3 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$.

□

Övning 1.7. Bevis då $n = 2$: Antag att $\alpha(\mathbf{v}_1 + \mathbf{w}) + \beta(\mathbf{v}_2 + \mathbf{w}) = \mathbf{0}$ är en icketrivial linjärkombination. Då gäller $(\alpha + \beta)\mathbf{w} = \alpha\mathbf{w} + \beta\mathbf{w} = -(\alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2) = \mathbf{u} \in \text{Span}(W)$. Om $\alpha + \beta \neq 0$ ger division med $\alpha + \beta$ att $\mathbf{w} = \dfrac{\mathbf{u}}{\alpha + \beta} \in \text{Span}(W)$. Om $\alpha + \beta = 0$ gäller $\alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$. Eftersom $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ är linjärt oberoende får vi $\alpha = \beta = 0$ vilket motsäger att den ursprungliga linjärkombinationen var icketrivial.

□

Övning 1.8. Uppenbarligen är $U = \{(3s, s, 7t, t, u); s, t, u \in \mathbb{R}\}$. (Detta är parameterframställningen av lösningen av ekvationssystemet $x_1 = 3x_2, x_3 = 7x_4$.) Men $(3s, s, 7t, t, u) = s(3, 1, 0, 0, 0) + t(0, 0, 7, 1, 0) + u(0, 0, 0, 0, 1)$ så vektorerna $(3, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 7, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 1)$ spänner U. Det är lätt att se att de är linjärt oberoende och alltså är de en bas.

□

Övning 1.9. Kanske en kuggfråga. Vi vet att $1, t, t^2, t^3$ är en bas. Men det är också t.ex. $1, t, t^2 + t^3, t^3$.

□

Övning 1.10. Antag att $ae^x + bxe^x + ce^{2x} = 0$.

(a) Division med e^{2x} ger $ae^{-x} + bxe^{-x} + c = 0$. Låter vi $x \to \infty$ får vi $c = 0$. Så $ae^x + bxe^x = 0$. Dividerar vi nu med xe^x och låter $x \to \infty$ får vi $b = 0$. Så $ae^x = 0$ vilket ger $a = 0$. Alltså är funktionerna linjärt oberoende.

(b) Deriverar vi två gånger i $ae^x + bxe^x + ce^{2x} = 0$ får vi $(a+b)e^x + bxe^x + 2ce^{2x} = 0$ och $(a + 2b)e^x + bxe^x + 4ce^{2x} = 0$. Sätter vi $x = 0$ i dessa identiter får vi de tre ekvationerna $a + c = 0$, $a + b + 2c = 0$ och $a + 2b + 4c = 0$ med den unika lösningen $a = b = c = 0$.

(c) Om vi låter $x \neq 0$ vara en punkt i I har vi enligt (b) ekvationssystemet

$$E = \left(\begin{array}{ccc|c} ae^x & bxe^x & ce^{2x} & 0 \\ (a+b)e^x & bxe^x & 2ce^{2x} & 0 \\ (a+2b)e^x & bxe^x & 4ce^{2x} & 0 \end{array}\right).$$

Subtraherar vi den första raden från de två övriga, och sedan två gånger den andra från den sista får vi

$$E \sim \left(\begin{array}{ccc|c} ae^x & bxe^x & ce^{2x} & 0 \\ be^x & 0 & ce^{2x} & 0 \\ 2be^x & 0 & 3ce^{2x} & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} ae^x & bxe^x & ce^{2x} & 0 \\ be^x & 0 & ce^{2x} & 0 \\ 0 & 0 & ce^{2x} & 0 \end{array}\right)$$

som successivt ger $c = 0$, $b = 0$ och $a = 0$.

□

Övning 1.11. (a) Varje vektorrum som genereras av en ändlig mängd har en bas; Sant enl. Kor. 1.12.

(b) Varje vektorrum har en ändlig bas; Falskt. Motex. $\mathbb{P}[t]$.

(c) Ett vektorrum kan ha mer än en bas; Sant. T.ex. Både $(1,0),(0,1)$ och $(0,1),(1,1)$ är baser för $\mathbb{R}^2$.

(d) Om ett vektorrum har en ändlig bas så har alla baser lika många element; Sant. Det är Kor 1.14.

(e) $\mathbb{R}_n[t]$ har dimensionen n; Falskt. $1,t,t^2,\dots,t^n$ är en bas. Så dimensionen är $n+1$.

(f) $M_{m\times n}$ har dimensionen $m+n$; Falskt. Den är $m \times n$. Matriserna med en etta på plats ij, 0 annars är en bas.

(g) Om vektorerna $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n$ genererar vektorrummet V så kan varje vektor i V skrivas som en linjärkombination av $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n$ på precis ett sätt; Falskt. $(1,0),(0,1),(1,1)$ genererar $\mathbb{R}^2$ men $(1,1) = (1,0)+(0,1)$ (förutom den triviala framställningen $(1,1) = (1,1)$).

(h) Varje delrum till ett ändligtdimensionellt rum är ändligtdimensionellt; Sant. Om delrummet är oändligtdimensionellt finns det, för varje m, m stycken linjärt oberoende vektorer i delrummet. Enligt Lemma 1.17 kan dessa m vektorer utvidgas till en bas för hela vektorrummet så dimensionen är minst m för varje m och rummet är alltså oändligtdimensionellt.

(i) Om $\dim(V) = n$ så har V exakt ett delrum med dimension 0 och exakt ett med dimensionen n. Sant. Om U är ett delrum med dimensionen n så har det en bas $\mathbf{b}_1,\dots,\mathbf{b}_n$. Enligt Lemma 1.17 kan denna utvidgas till en bas för V. Men alla baser för V (Kor. 1.14) har n element. Så utvidningen är ingen utvidgning och $\mathbf{b}_1,\dots,\mathbf{b}_n$ är en bas för V. Alltså är $U = V$.

□

Övning 1.12. Vilka av följande mängder är vektorrum? Förklara!

(a) Alla kontinuerliga funktioner på $[0,1]$; Ett vektorrum. Slutet under $+$ och $\cdot$. Funktionen som är identiskt noll är nollvektor och inversen till f är $-f$.

(b) Alla polynom på $[-1,1]$ med $p(0)=0$; Ett vektorrum. Se (a).

(c) Alla polynom på $[-1,1]$ med $p(0)=1$; Inget vektorrum. Nollpolynomet uppfyller inte villkoret $p(0)=1$ så nollvektor saknas.

(d) Alla ickenegativa funktioner på intervallet $(1,\infty)$; Inget vektorrum. Om f är ickenegativ (och inte identiskt noll) så är $-f$ inte ickenegativ. Alltså är mängden inte sluten under multiplikation med skalärer.

(e) Alla symmetriska $n\times n$-matriser. Ett vektorrum. Om A och B är symmetriska är $A+B$ och λA det också.

Övning 1.13. Antag att $\dim(V)=n$ och $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n$ är vektorer i V. Visa att då är $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n$ linjärt oberoende om och endast om de genererar V.

Om de är linjärt oberoende kan de utvidgas till en bas för V. Denna bas har n vektorer så $\dim(V)=n$ och $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n$ är en bas för V. Speciellt genererar vektorerna V.

Omvänt om $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n$ genererar V, är en delmängd av dem en bas för V. Men basen har n basvektorer och därför är $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n$ en bas för V. Speciellt är vektorerna linjärt oberoende.

□

Övning 1.14. Kan vektorerna $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ vara linjärt oberoende men vektorerna $\mathbf{w}_1=\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2$, $\mathbf{w}_2=\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_3$ och $\mathbf{w}_3=\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_3$ linjärt beroende?

Svar: Nej: Antag att $a(\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2)+b(\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_3)+c(\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_3)=\mathbf{0}$. Då är $(a+c)\mathbf{v}_1+(a+b)\mathbf{v}_2+(b+c)\mathbf{v}_3=\mathbf{0}$. Men om $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ är linjärt oberoende ger detta ekvationssystemet $a+c=0$, $a+b=0$, $b+c=0$ som bara har lösningen $a=b=c=0$.

Övning 1.15. Antag att U är ett delrum till det ändligtdimensionella vektorrummet V. Visa att om $\dim U=\dim V$ så är $U=V$.

Se 1.11 (i).

□

Övning 1.16. $\dim\mathbb{P}_m=m+1$. Det går *inte* att skriva polynomet $p=1$ som en linjärkombination av $p_0,p_1,\dots,p_m$ eftersom varje sådan linjärkombination är 0 då $t=0$. Polynomen $p,p_0,p_1,\dots,p_m$ är $m+2$ stycken , dvs. fler än dimensionen. Så de är linjärt beroende (Lemma 1.13) och eftersom $p\notin\mathrm{Span}(\mathrm{p_0},\mathrm{p_1},\dots,\mathrm{p_m})$ är $p_0,p_1,\dots,p_m$ det också.

□

Övning 1.17. Om V är ändligtdimensionellt med dimensionen N kan det inte (Lemma 1.13) finnas fler än N vektorer som är linjärt oberoende.

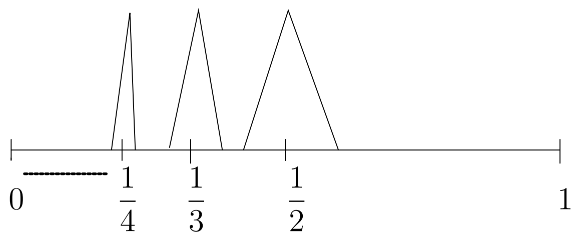
Omvänt, antag att rummet genereras av ändligt många vektorer. Då finns en bas för V med säg N vektorer. Då kan det inte finnas en följd av med fler än N linjärt oberoende vektorer, speciellt inte oändligt många.

□

Övning 1.18. (a), (b) och (c): Vektorerna $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3,\dots$ där $\mathbf{e}_i=(0,\dots,0,1,0,0\dots,)$ är vektorn med en etta på plats i, 0 för övrigt är linjärt oberoende så rummen är oändligtdimensionella enligt förra övningen.

Anmärkning. $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3,\dots$ är en bas för $\mathbb{R}^\infty_{00}$ men inte för $\mathbb{R}^\infty$ eller $\mathbb{R}^\infty_0$.

(d) Låt $\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2,\mathbf{f}_3,\dots$ vara en oändlig följd av kontinuerliga funktioner på $[0,1]$ med disjunkta stöd, t.ex. som i figuren.



$\square$

Övning 1.19. (a) Jämför Övning 1.3.

(b) Detta är snarlikt Övning 1.4.

Ena hållet (Vilket?) är trivialt. För det andra hållet antar vi att $\mathbf{0}$ bara har den triviala framställningen. Antag nu att $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \ldots + \mathbf{u}_m = \mathbf{v}_1 + \ldots + \mathbf{v}_m$ där $\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i \in U_i$. Då är $\mathbf{u}_i - \mathbf{v}_i \in U$ och $(\mathbf{u}_1 - \mathbf{v}_1) + \ldots + (\mathbf{u}_m - \mathbf{v}_m) = \mathbf{0}$, vilket ger $(\mathbf{u}_1 - \mathbf{v}_1) = \mathbf{0}, \ldots, (\mathbf{u}_m - \mathbf{v}_m) = \mathbf{0}$, dvs. $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{u}_m = \mathbf{v}_m$ så framställningen är entydig.

$\square$

Övning 1.20. Låt $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$ vara en bas för V. Då duger $U_i = \mathrm{Span}(b_i), i = 1, \ldots, n$.

$\square$

Övning 1.21. Om $U_1 \cap U_2 \neq \{\mathbf{0}\}$ så finns $\mathbf{0} \neq \mathbf{u} \in U_1 \cap U_2$. Men då gäller $\mathbf{0} = \mathbf{u} - \mathbf{u}$ så framställningen är inte entydig.

Antag omvänt att $U_1 \cap U_2 = \{\mathbf{0}\}$ och $\mathbf{0} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$ där $\mathbf{u}_i \in U_i$. Då är $\mathbf{u}_1 = -\mathbf{u}_2 \in U_2$. Så $\mathbf{u}_1 \in U_1 \cap U_2$ och alltså $\mathbf{u}_1 = \mathbf{0}$.

$\square$

Övning 1.22. Låt $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_5$ och $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_5$ vara baser för U respektive V. De är 10 stycken, dvs. fler än $\dim \mathbb{R}^9 = 9$. Så de måste vara linjärt beroende. Men om $\lambda_1 \mathbf{e}_1 + \ldots + \lambda_5 \mathbf{e}_1 + \beta_1 \mathbf{f}_1 + \ldots \beta_5 \mathbf{f}_5 = \mathbf{0}$, där inte alla koefficienterna är 0, så är $\mathbf{0} \neq \mathbf{u} = \lambda_1 \mathbf{e}_1 + \ldots + \lambda_5 \mathbf{e}_5 = -(\beta_1 \mathbf{f}_1 + \ldots \beta_5 \mathbf{f}_5) \in U \cap V$ och alltså är $U \cap V \neq \emptyset$.

$\square$

Övning 1.23. Om $U+V$ är ett delrum till $\mathbb{C}^8$ med dimensionen 8 gäller enligt Övning 1.15 att $U + V = \mathbb{C}^8$. Om $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ och $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_5$ är baser för U och V spänner alltså dessa 8 vektorer $\mathbb{C}^8$. Men då är de också linjärt oberoende vilket ger $\mathbb{C}^8 = U \oplus V$.

$\square$

Övning 1.24. Antag att $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \ldots$ är en uppräknelig bas för V och $E = \{\mathbf{e}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ en annan bas. För varje i finns en ändlig indexmängd I_i och skalärer c_λ så att

$$\mathbf{b}_i = \sum_{\lambda \in I_i} c_\lambda \mathbf{e}_\lambda \, . \tag{1.1}$$

(Detta är en ändlig summa.) Låt $I = \cup_{i=1}^{\infty} I_i$. Detta är en uppräknelig union av ändliga mängder och alltså uppräknelig (Varför då?). Varje vektor i V kan skrivas $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \mathbf{b}_i$ för något N. Använder vi nu (1.1) ser vi att varje vektor $\mathbf{v} \in V$ kan skrivas som en (ändlig) linjärkombination $\sum_{\lambda \in I} \alpha_\lambda \mathbf{e}_\lambda$. Så $\mathrm{Span}\,(\{\mathbf{e}_\lambda\}_{\lambda \in \mathrm{I}}) = \mathrm{V}$. Detta betyder att $I = \Lambda$ som alltså är uppräknelig.

$\square$

Kapitel 2

Övning 2.1. (a) Om $T\mathbf{x} = T\mathbf{y} = \mathbf{0}$ så gäller $T(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = T\mathbf{x} + T\mathbf{y} = \mathbf{0}$ och $T(\alpha\mathbf{x}) = \alpha T\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

(b) Om $\mathbf{x} = T\mathbf{u}$ och $\mathbf{y} = T\mathbf{v}$ så gäller $\mathbf{x}+\mathbf{y} = T\mathbf{u} + T\mathbf{v} = T(\mathbf{u}+\mathbf{v})$ och $\alpha\mathbf{x} = \alpha T\mathbf{u} = T(\alpha\mathbf{u})$.

□

Övning 2.2. Antag att $T\mathbf{u} = T\mathbf{v}$. Då gäller $T(\mathbf{u}-\mathbf{v}) = T\mathbf{u} - T\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Så $\mathbf{u}-\mathbf{v} = \mathbf{0}$ och $\mathbf{u} = \mathbf{v}$.

□

Övning 2.3. Exempel. Låt $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ vara definierad genom $Tx = (x, 0)$. Funktionen $b(x, y) = x + \sin(y)$ är inte linjär men $b \circ T(x) = b(x, 0) = x + \sin 0$. (Men $B(x, y) = x$ är en linjär vänsterinvers.)

□

Övning 2.4. Låt $U_1 = \operatorname{Ran} T$ och låt $T_1 : V \to U_1$ vara given av $T_1\mathbf{u} = T\mathbf{u}$. (Så det är "samma" avbildning som T men betraktad som en avbildning in i U_1.) Den är en bijektion och har alltså en invers $T_1^{-1} : U_1 \to V$. Det gäller att utvidga T_1^{-1} till en linjär avbildning på W.

Låt $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$ vara en bas för U_1 och utvidga den till en bas $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m$ för W. Låt $U_2 = \operatorname{Span}(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m)$. Då gäller $W = U_1 \oplus U_2$ så $\mathbf{w} \in W$ kan entydigt skrivas $\mathbf{w} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$ där $\mathbf{u}_i \in U_i$. Vi definierar T^{-1} på W genom att sätta $T^{-1} = 0$ på U_2 och utvidga linjärt, dvs. vi låter $T^{-1}\mathbf{w} = T^{-1}(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) = T^{-1}\mathbf{u}_1 = T_1^{-1}\mathbf{u}_1$.

Eftersom $T\mathbf{v} \in U$ gäller $T^{-1}T\mathbf{v} = T_1^{-1}T\mathbf{v} = \mathbf{v}$, så T^{-1} är en vänsterinvers.

□

Övning 2.5. Ett exempel är $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ där $T(x, y) = x$ och $c(x) = (x, \sin x)$. Då är c inte linjär men $T \circ c(x) = T(x, \sin x) = x$. (Men $c_1(x) = (x, 0)$ är en linjär högerinvers till T.)

□

Övning 2.6. Låt U_1 vara delrummet $U_1 = \operatorname{Ker} T$. Som i Övning 2.4 finns ett delrum U_2 så att $V = U_1 \oplus U_2$. Betrakta nu $T_2 : U_2 \to W$ där $T_2\mathbf{u} = T\mathbf{u}, \mathbf{u} \in U_2$.

Påstående: T_2 är en bijektion och har alltså en invers T_2^{-1}.

Argument: Om $\mathbf{w} \in W$, så finns, eftersom T är surjektiv, $\mathbf{u} \in V$ med $T\mathbf{u} = \mathbf{w}$. Om $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$ där $\mathbf{u}_i \in U_i$ så är $T\mathbf{u}_1 = \mathbf{0}$ och $T_2\mathbf{u}_2 = T\mathbf{u}_2 = T\mathbf{u}_1 + T\mathbf{u}_2 = T\mathbf{u} = \mathbf{w}$ så T_2 är surjektiv. Omvänt om $T_2\mathbf{u}_2 = T_2\mathbf{v}_2$ där $\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2 \in U_2$ så är $T_2(\mathbf{u}_2 - \mathbf{v}_2) = \mathbf{0}$.

Så $\mathbf{u}_2 - \mathbf{v}_2 \in U_1 \cap U_2$. Men eftersom $V = U_1 \oplus U_2$ ger detta $\mathbf{u}_2 - \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$. Så $\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2$ och alltså är T_2 injektiv.

Nu låter vi $T^{-1} : W \to V$ vara "samma" invers T_2^{-1} bara betraktad som en avbildning in i V. Så $T^{-1}\mathbf{w} = T_2^{-1}\mathbf{w}$ för alla $\mathbf{w} \in W$. Då gäller, eftersom $T^{-1}\mathbf{w} \in U_2$, att $TT^{-1}\mathbf{w} = T_2 T_2^{-1}\mathbf{w} = \mathbf{w}$ så T^{-1} är en högerinvers.

$\square$

Övning 2.7. Exempel: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$ och $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ är inte inverterbara men

$AB = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$ är det. (Däremot är $BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ det inte.)

BA kan inte också vara inverterbar, ty om AB har inversen C och BA har inversen D så gäller $A(BC) = (AB)C = I$ och $D(BA) = (DB)A = I$. Detta betyder att A har både höger och vänsterinvers och alltså är A inverterbar, vilket motsäger antagandet.

$\square$

Övning 2.8. $A \equiv B$ om $A = PBP^{-1}$ för någon (inverterbar) matris P.

1. Att $A \equiv A$ följer om vi tar $P = I$.
2. Om $A \equiv B$ så $A = PBP^{-1}$. Vi får $B = P^{-1}B(P^{-1})^{-1} = P^{-1}BP$ så $B \equiv A$.
3. Om $A \equiv B$ och $B \equiv C$ är $A = PBP^{-1}$ och $B = QCQ^{-1}$ för några matriser P, Q. Men då är $A = PQCQ^{-1}P^{-1} = (PQ)C(PQ)^{-1}$, så $A \equiv C$.

$\square$

Övning 2.9. Produktregeln för determinanter, $\det AB = \det A \det B$, ger att $\det A = \det(PBP^{-1}) = \det P \det A \det P^{-1}$. Men eftersom $1 = \det I = \det(PP^{-1}) = \det P \det P^{-1}$, får vi $\det A = \det B$.

$\square$

Övning 2.10. Mittpunkten ges av $\mathbf{m} = \frac{1}{2}(\mathbf{x} + \mathbf{y})$. Så $T\mathbf{m} = \frac{1}{2}(T\mathbf{x} + T\mathbf{y})$, och är alltså mittpunkt till $T\mathbf{x}$ och $T\mathbf{y}$.

$\square$

Övning 2.11. Det är geometriskt uppenbart att $R_{\alpha+\beta} = R_\alpha R_\beta$. Så

$$R_{\alpha+\beta} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}.$$

Å andra sidan ger en kalkyl att

$$R_\alpha R_\beta = \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & -(\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta) \\ \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta & \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \end{pmatrix},$$

och additionsformlerna följer.

$\square$

Övning 2.12. Den avbildning på $\mathbb{R}^2$ som i standardbasen har martrisen $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$\square$

Övning 2.13. De avbildningar på $\mathbb{R}^2$ som i standardbasen ges av martriserna

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ och } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\square$

Övning 2.14. Försök 1. Sätt $T\mathbf{v} = T(x,y) = (\sqrt{xy}, 0)$. Om $x, y \geq 0$ och $\alpha \geq 0$ så gäller $T(\alpha\mathbf{v}) = T(\alpha x, \alpha y) = (\sqrt{\alpha x \alpha y}, 0) = \alpha(\sqrt{xy}, 0) = \alpha T\mathbf{v}$. Men om t.ex. $\mathbf{v} = (1,0)$ och $\mathbf{u} = (1,1)$ så är $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (2,1)$. Så $T\mathbf{v} = (0,0)$, $T\mathbf{u} = (1,0)$ och $T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = (\sqrt{2}, 0) \neq (0,0) + (1,0) = T\mathbf{v} + T\mathbf{u}$ så T är inte additiv.

Lösning. Vi behöver utvidga T till vektorer med negativa koordinater. Låt sgn vara funktionen $\operatorname{sgn}(x) = 1$ om $x > 0$, $\operatorname{sgn}(x) = 0$ om $x = 0$, och $\operatorname{sgn}(x) = -1$ om $x < 0$.

Vi sätter $T\mathbf{v} = (\operatorname{sgn}(x)\sqrt{|xy|}, 0)$ som alltså inte är additiv. Men vi har $T(\alpha\mathbf{v}) = (\operatorname{sgn}(\alpha x)\sqrt{|\alpha x \alpha y|}, 0) = (\operatorname{sgn}(\alpha)\operatorname{sgn}(x)|\alpha|\sqrt{|xy|}, 0) = (\alpha \operatorname{sgn}(x)\sqrt{|xy|}, 0) = \alpha T\mathbf{v}$.

$\square$

Övning 2.15. Antag att $\alpha_1 T\mathbf{e}_1 + \ldots + \alpha_n T\mathbf{e}_n = \mathbf{0}$. Eftersom T är linjär betyder det att $T(\alpha_1\mathbf{e}_1 + \ldots + \alpha_n\mathbf{e}_n) = \mathbf{0}$, och eftersom T är injektiv att $\alpha_1\mathbf{e}_1 + \ldots + \alpha_n\mathbf{e}_n = \mathbf{0}$. Men nu är $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ linjärt oberoende och alltså är $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$ den enda lösningen.

$\square$

Övning 2.16. Låt $\mathbf{v} \in V$. Eftersom T är surjektiv finns $\mathbf{u} \in V$ med $T\mathbf{u} = \mathbf{v}$. $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ spänner V så $\mathbf{u} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \ldots + \alpha_n\mathbf{e}_n$ för några skalärer α_i. Vi får $\mathbf{v} = T\mathbf{u} = T(\alpha_1\mathbf{e}_1 + \ldots + \alpha_n\mathbf{e}_n) = \alpha_1 T\mathbf{e}_1 + \ldots + \alpha_n T\mathbf{e}_n$ och alltså spänner $T\mathbf{e}_1, \ldots, T\mathbf{e}_n$ V.

$\square$

Övning 2.17. Det linjära ekvationssystemet $x_1 = 5x_2, x_4 = 3x_3$ har två fria variabler. Så $\dim \operatorname{Ker} T = 2$. Dimensionssatsen ger att $\dim \operatorname{Ran} T = 2 = \dim \mathbb{R}^2$. Så $\operatorname{Ran} T$ är ett delrum till $\mathbb{R}^2$ med full dimension. Så enligt Övning 1.15 är $\operatorname{Ran} T = \mathbb{R}^2$, dvs. T är surjektiv.

$\square$

Övning 2.18. Antag att det finns en sådan avbildning T. Ekvationssystemet $x_1 = 5x_2$ och $x_3 = x_4 = 2x_5$ har tre pivotelement och alltså två fria variabler. Så $\dim \operatorname{Ker} T = 2$. Eftersom T går in i $\mathbb{C}^2$ gäller $\dim \operatorname{Ran} T \leq 2$. Dimensionsatsen ger $5 = \dim \operatorname{Ker} T + \dim \operatorname{Ran} T \leq 2 + 2 = 4$, en motsägelse.

$\square$

Övning 2.19. Eftersom AB är inverterbar gäller $AB(AB)^{-1} = I$ och $(AB)^{-1}AB = I$. Den första likheten ger att A har högerinversen $B(AB)^{-1}$, och den andra att B har vänsterinversen $(AB)^{-1}A$.

Anmärkning. A och B behöver *inte* vara inverterbara (Övning. Visa det!). Så i allmänhet gäller inte $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. $\square$

Övning 2.20. (a) T.ex. $A = I$, $B = -I$,

(b) T.ex. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ och $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\square$

Övning 2.21. Låt $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ vara en bas på V och $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_m$ vara en bas på W.

Antag $\dim W \leq \dim V$, dvs. $m \leq n$. Definiera $T : V \to W$ genom $T\mathbf{e}_i = \mathbf{f}_i, i \leq m$ och $T\mathbf{e}_i = \mathbf{0}, i > m$, och utvidga linjärt. Detta betyder att om $\mathbf{v} = \lambda_1\mathbf{e}_1 + \ldots + \lambda_n\mathbf{e}_n$ sätter vi $T\mathbf{v} = \lambda_1 T\mathbf{e}_1 + \ldots + \lambda_n T\mathbf{e}_n = \lambda_1\mathbf{f}_1 + \ldots + \lambda_m\mathbf{f}_m$. Då är T surjektiv. Detta följer eftersom om $w \in W$ finns λ_i med $w = \lambda_1\mathbf{f}_1 + \ldots + \lambda_m\mathbf{f}_m$. Så w är bilden av $\mathbf{v} = \lambda_1\mathbf{e}_1 + \ldots + \lambda_m\mathbf{e}_m$.

Omvänt om $m > n$ och $T : V \to W$, så ger dimensionssatsen att $\dim \operatorname{Ran} T \leq \dim \operatorname{Ker} T + \dim \operatorname{Ran} T = n < m = \dim W$. Alltså är $\operatorname{Ran} T$ ett äkta delrum till W, så T är inte surjektiv.

$\square$

Övning 2.22. Låt $U_0 = \operatorname{Ker} ST$, $V_0 = \operatorname{Ker} S$. U_0 och V_0 är delrum till U och V. Eftersom $ST = 0$ på U_0 gäller att $T(U_0) \subset V_0$. Så vi kan betrakta T och S som avbildningar definierade på U_0 respektive V_0. Eftersom $\operatorname{Ran} T$ är ett delrum till V_0 gäller $\dim \operatorname{Ran} T \leq \dim V_0 = \dim \operatorname{Ker} S$. Men enligt dimensionssatsen gäller också $\dim \operatorname{Ker} T + \dim \operatorname{Ran} T = \dim U_0$. Detta ger $\dim \operatorname{Ker} ST = \dim U_0 = \dim \operatorname{Ker} T + \dim \operatorname{Ran} T \leq \dim \operatorname{Ker} T + \dim \operatorname{Ker} S$.

$\square$

Övning 2.23. Genom att välja en bas kan vi anta att T ges av en matris $A = [T]_B$. Denna kommuterar med alla matriser, speciellt med E_{kl}, den matris där alla element är 0 utom det på plats kl som är ett.

Låt oss först anta att matrisen är 2×2, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Då gäller (Kontrollera det!) $AE_{11} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix}$ och $E_{11}A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Att dessa är lika medför att $a_{12} = a_{21} = 0$ så A är diagonal, $A = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}$. Men $AE_{12} = \begin{pmatrix} 0 & d_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ och $E_{12}A = \begin{pmatrix} 0 & d_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Detta ger att $d_1 = d_2$ och alltså är $A = d_1 I$.

Det allmänna fallet är likadant. Låt $\mathbf{k}_i$ och $\mathbf{r}_i$ vara kolonnerna respektive raderna i A. Kolonn i i matrisen AE_{kk} är $\mathbf{0}$ om $i \neq k$ och kolonn k är $\mathbf{k}_k$. I matrisen $E_{kk}A$ är raderna $\mathbf{0}$ utom rad k som är $\mathbf{r}_k$. När matriserna är lika ger detta att $a_{ik} = 0$ när $i \neq k$. Så A är en diagonalmatris, $A = D = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$. Elementen i DE_{kl} är 0 förutom på plats kl där det är d_k. Elementen i $E_{kl}D$ är 0 förutom på plats kl där det är d_l. Eftersom dessa skall vara lika får vi att $d_k = d_l$ för alla k och l. Alltså är $A = D = d_1 I$ en multipel av enhetsmatrisen.

$\square$

Övning 2.24. (a) Sätt $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. En kalkyl visar att $\det A = -2 \neq \mathbf{0}$. Så vektorerna är linjärt oberoende (Varför då?).

(b) Om B är basen av de givna vektorerna så är $[I]_{SB} = \Big([\mathbf{b}_1]_S \dots [\mathbf{b}_4]_S\Big) = A$.

(c) Låt $[\mathbf{v}]_B = (1, 0, 1, 0)$. Då är $[\mathbf{v}]_S = [I]_{SB}[\mathbf{v}]_B = (1, 5, 3, 1)$.

(d) Låt $[\mathbf{u}]_S = (1, 0, 1, 0)$. Då är $[I]_{SB}[\mathbf{u}]_B = [\mathbf{u}]_S$. På matrisform blir detta ekvationssystem

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \text{ räkna,räkna } \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{2} \end{array}\right).$$

Så $[\mathbf{u}]_B = \dfrac{1}{2}(2, -2, 3, -11)$.

Anmärkning. Man kan också beräkna $[I]_{BS} = [I]_{SB}^{-1}$ och sen $[\mathbf{u}]_B = [I]_{BS}[\mathbf{u}]_S$ men det blir ännu jobbigare.

□

Övning 2.25. Låt P och Q vara de två givna baserna och S standardbasen på $\mathbb{P}_2$. Då är $[I]_{SP} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ och $[I]_{SQ} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Så $[I]_{PQ} = [I]_{PS}[I]_{SQ} = [I]_{SP}^{-1}[I]_{SQ}$. En (enkel) kalkyl ger $[I]_{SP}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Så $[I]_{PQ} = [I]_{SP}^{-1}[I]_{SQ} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Alternativ lösning (utan att blanda in standardbasen). Vi ser att (dvs. vi löser det enkla ekvationssystemet $q_0 = ap_0 + bp_1$) $q_0 = 1 - t = 2 - (1 + t) = 2p_0 - p_1$ och att $q_1 = 1 + 2t = -1 + 2(1 + t) = -p_0 + 2p_1$. Så

$$[I]_{PQ} = \Big([q_0]_P \quad [q_1]_P\Big) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

□

Övning 2.26. Vi har

$$[T]_S = \Big([T\mathbf{e}_1]_S \quad [T\mathbf{e}_2]_S\Big) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Vi har $[T]_B = [I]_{BS}[T]_S[I]_{SB}$. Nu är $[I]_{SB} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. En kalkyl ger $[I]_{BS} = [I]_{SB}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ och $[T]_B = \begin{pmatrix} 9 & 13 \\ -5 & -8 \end{pmatrix}$.

$\square$

Övning 2.27. Eftersom $\det A = -4 \neq -8 = \det B$ är determinanterna *inte* konjugerade.

$\square$

Kapitel 3

Övning 3.1. (a) Varje operator på ett n-dimensionellt komplext vektorrum har n olika egenvärden.

Falskt. T.ex. har identiteten I på $\mathbb{R}^n$ bara egenvärdet 1 (men med multipliciteten n).

(b) Om T har en egenvektor har den oändligt många egenvektorer.

Sant. Om $\mathbf{u}$ är en egenvektor är alla multiplar $\lambda\mathbf{u}, \lambda \neq 0$, det också.

(c) Det finns en operator på ett reellt vektorrum utan egenvektor.

Sant. Se Exempel 3.8

(d) Det finns en operator på ett ändligtdimensionellt komplext vektorrum utan egenvektor.

Falskt. Se Sats 3.5.

(e) Det finns en operator på ett oändligtdimensionellt komplext vektorrum utan egenvektor.

Sant. Framåtskift $F(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (0, x_1, x_2, x_3, \ldots)$ har ingen egenvektor. Ty om $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$ och $F\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ så är $(0, x_1, x_2, x_3, \ldots) = \lambda(x_1, x_2, x_3, \ldots)$. Om $\lambda = 0$ ger detta $x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = 0$. Så $\mathbf{x} = 0$ och $\lambda = 0$ är inget egenvärde. Om $\lambda \neq 0$ har vi $0 = \lambda x_1$, $x_1 = \lambda x_2$, $x_2 = \lambda x_3$, $\ldots$, som successivt ger $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, \ldots$. Så $\mathbf{x} = 0$ och $\lambda \neq 0$ är inte heller något egenvärde.

(f) Summan av två egenvektorer är en egenvektor.

Falskt. Om $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ så är $\mathbf{u} = (1, 0)$ och $\mathbf{v} = (0, 1)$ egenvektorer till A med egenvärdena 1 respektive 0. Men $A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A(1, 1) = (1, 0)$ så $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ är ingen egenvektor.

(g) Summan av två egenvektorer till samma egenvärde är en egenvektor.

Sant. Om $A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$ och $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ så är $A(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = A\mathbf{u}+A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{u}+\lambda\mathbf{v} = \lambda(\mathbf{u}+\mathbf{v})$.

Övning 3.2. (a) Vi har

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -5 \\ 2 & -3\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda + 1)(\lambda - 2) \; .$$

Så egenvärdena är -1 och 2.

Egenvektorna till -1 fås ur $(A+I)\mathbf{u}=0$. Men

$$A+I=\begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Så egenvektorerna är (nollskilda) multiplar av $(1,1)$.

Egenvektorna till 2 fås ur $(A-2I)\mathbf{u}=0$. Men

$$A-2I=\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Så egenvektorerna är (nollskilda) multiplar av $(5,2)$.

(b) Låt $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Det karakteristiska polynomet är

$$p(\lambda)=\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 3-\lambda & 4-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-3)^2 .$$

Så A har det dubbla egenvärdet 3. Egenvektorerna fås ur ekvationen $(A-3I)\mathbf{u}=0$. Nu är

$$A-3I=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Så egenvektorerna är multiplar av vektorn $(1,1)$.

(c) Det karakteristiska polynomet är

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & 3 \\ -3 & -5-\lambda & -3 \\ 3 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & 3 \\ -2-\lambda & -2-\lambda & 0 \\ 3 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= -(\lambda+2)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+2)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2+\lambda & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (\lambda+2)^2\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+2)^2(\lambda-1) . \end{aligned}$$

Här har vi adderat den första raden till den andra, brutit ut $-(\lambda+2)$, subtraherat första kolonnen från den andra, och utvecklat längs andra kolonnen.

Egenvärdena är alltså 1 och -2, som är dubbellt.

Egenvektorerna till egenvärdet 1 fås ur

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -3 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \ldots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Så egenvektorerna är multiplar av $(1, -1, 1)$.
Egenvektorerna till egenvärdet -2 fås ur

$$A + 2I = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -3 & -3 & -3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \ldots \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Så egenvektorerna är linjärkombinationer av av $(1, 0, -1)$ och $(1, -1, 0)$.

Övning 3.3. Det karakteristiska polynomet är

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} \cos\varphi - \lambda & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - \cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi .$$

Så $p(\lambda) = 0$ då $(\lambda - \cos\varphi)^2 = -\sin^2\varphi$ eller $\lambda = \cos\varphi \pm i\sin\varphi$.
Egenvektorn till $\lambda = \cos\varphi + i\sin\varphi$ fås ur

$$R_\varphi - (\cos\varphi + i\sin\varphi)I = \begin{pmatrix} -i\sin\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & -i\sin\varphi \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Så $\mathbf{e}_+ = (i, 1)$ är en egenvektor till egenvärdet $\cos\varphi + i\sin\varphi$. Eftersom R_φ är reell är $\mathbf{e}_- = \overline{\mathbf{e}_+} = (-i, 1)$ en egenvektor till egenvärdet $\cos\varphi - i\sin\varphi$.

Övning 3.4. Om $\mathbf{u}$ är en egenvektor med egenvärde λ så gäller $T^k\mathbf{u} = \lambda^k\mathbf{u}$. Så om $T^k = 0$ får vi $\lambda^k\mathbf{u} = \mathbf{0}$ och, eftersom $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, $\lambda = 0$.

Övning 3.5. Låt $M = \begin{pmatrix} I & * \\ 0 & A \end{pmatrix}$ och $I = I_k$ enhetsmatrisen med k rader och kolonner.
Successiv utveckling efter första kolonnen ger

$$\det M = \begin{vmatrix} I_k & * \\ 0 & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_{k-1} & * \\ 0 & A \end{vmatrix} = \cdots = \begin{vmatrix} 1 & * \\ 0 & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A \end{vmatrix} = \det A .$$

De andra påståendena följer på liknande sätt, det andra med utveckling efter sista raden, det tredje med utveckling efter första raden, och det fjärde med utveckling efter sista kolonnen.

Övning 3.6. Enligt ledningen (Verifiera den!) och produktregeln gäller

$$\det \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} I & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} .$$

Enligt förra övningen ger detta

$$\det \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det B \det A\,.$$

Övning 3.7. Ledningen ger $\begin{pmatrix} 0 & A \\ -B & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ B & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AB & A \\ 0 & I \end{pmatrix}$. Så

$$\det \begin{pmatrix} 0 & A \\ -B & I \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & A \\ -B & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ B & I \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} AB & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = \det AB\,.$$

Övning 3.8. Om A är en $m \times m$ matris och B är en $n \times n$ matris och $M = \begin{pmatrix} A & * \\ 0 & B \end{pmatrix}$, så gäller enligt Övning 3.6 att

$$p_M(\lambda) = \det(M - \lambda I) = \begin{vmatrix} A - \lambda I_m & * \\ 0 & B - \lambda I_n \end{vmatrix}$$

$$= \det(A - \lambda I_m) \det(B - \lambda I_n) = p_A(\lambda) p_B(\lambda)\,.$$

Övning 3.9. Eftersom $T\mathbf{v}_i = \lambda \mathbf{v}_i$ gäller $[T\mathbf{v}_i]_B = \lambda \mathbf{e}_i$, $i = 1, \ldots, k$, där $\mathbf{e}_i$ är vektorn med 1 på plats i, 0 för övrigt. För $i > k$ vet vi inget om $[T\mathbf{v}_i]_B$. Så

$$[T]_B = \Big([T\mathbf{v}_1]_B \ldots [T\mathbf{v}_k]_B \; [T\mathbf{v}_{k+1}]_B \ldots [T\mathbf{v}_n]_B \Big) = \begin{pmatrix} \lambda I_k & * \\ 0 & * \end{pmatrix}\,.$$

Övning 3.10. Låt λ_0 vara ett egenvärde och $\dim E_\lambda = k$. Om B är en bas där de k första vektorerna är egenvektorer till detta egenvärde gäller enligt förra övningen att

$$p_T(\lambda) = \det([T - \lambda I]_B) = \begin{pmatrix} (\lambda_0 - \lambda) I_k & * \\ 0 & A - \lambda I \end{pmatrix}\,.$$

Genom upprepad utveckling efter första kolonnen (eller Övning 3.6), ger detta $p_T(\lambda) = (\lambda_0 - \lambda)^k p_A(\lambda)$. Alltså har λ_0 algebraisk multiplicitet minst k. (Multipliciteten är större k om $p_A(\lambda_0) = 0$.)

Övning 3.11. Determinanträkning visar att $p_A(\lambda)$ är ett polynom av grad n med högstagradstermen $(-1)^n \lambda^n$. Dessutom gäller att $p_A(\lambda_i) = 0$. Så faktorsatsen ger att $p_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda)$. (Detta gäller också om egenvärdena är multipla.) Sätter vi $\lambda = 0$ får vi $\det A = p_A(0) = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$.

Anmärkning. Om A är diagonaliserbar kan vi se detta enklare genom att välja en bas B av egenvektorer. Då är $[A]_B$ en diagonalmatris med egenvärden på diagonalen. Men för diagonalmatris är $\det[A]_B$ produkten av dessa diagonalelement.

Övning 3.12. Låt $A = [T]_B$ i någon bas B. Om $A = (a_{ij})$, ger mer determinanträkning att $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \cdots (a_{nn} - \lambda) + q(\lambda)$ där $q(\lambda)$ har grad högst $n - 2$. Så $p_A(\lambda) = (-1)^n(\lambda^n + (-1)^{n-1}\lambda^{n-1}(a_{11} + a_{22} + \cdots a_{nn}) + Q(\lambda) = (-1)^n(\lambda^n + (-1)^{n-1}\lambda^{n-1}\mathrm{Tr}\, A + Q(\lambda)$ där igen Q är ett polynom av grad högst $n-2$. Men enligt förra övningen är $p_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda) = (-1)^n(\lambda^n + (-1)^{n-1}\lambda^{n-1}(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n) + \tilde{Q}$. Koefficienterna i dessa polynom är lika och vi får $\mathrm{Tr}\, A = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$.

Övning 3.13. Påståendet är sant. Om U är ett delrum där $\{\mathbf{0}\} \neq U \neq V$ så finns två vektorer $\mathbf{u} \in U$ och $\mathbf{v} \in V \setminus U$. Då finns en linjär avbildning $T : V \to V$ med $T\mathbf{u} = \mathbf{v} \notin U$ och alltså är U inte invariant under T.

En sådan avbildning T kan till exempel bildas genom att välja en bas $\mathbf{u}, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ och om $[\mathbf{x}]_B = (\alpha, \alpha_2 \ldots, \alpha_n)$ sätta $T\mathbf{x} = \alpha\mathbf{u}$.

Övning 3.14. Att $\mathbf{x} \in \mathrm{Ker}(T - \lambda I)$ betyder att $T\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Vi skall visa att $S\mathbf{x} \in \mathrm{Ker}(T - \lambda I)$ dvs. att att $TS\mathbf{x} = \lambda S\mathbf{x}$. Men eftersom S och T kommuterar gäller $T(S\mathbf{x}) = S(T\mathbf{x}) = S(\lambda\mathbf{x})) = \lambda S\mathbf{x}$.

Övning 3.15. Om $p(t) = a + bt \neq 0$ uppfyller $Tp(t) = \lambda p(t)$ gäller $b + at = \lambda a + \lambda bt$, så $b = \lambda a$ och $a = \lambda b$. Detta ger $a = \lambda b = \lambda^2 a$. Så om $a \neq 0$ får vi $\lambda = \pm 1$. Å andra sidan om $a = 0$, följer att $b = 0$ och alltså $p(t) = 0$, en motsägelse. Så egenvärdena är ± 1.

Egenvektorn till $\lambda = 1$ fås ur $b + at = a + bt$ vilket är ekvivalent med $a = b$ och en egenvektor är $1 + t$.

Egenvektorn till $\lambda = -1$ fås ur $b + at = -a - bt$ vilket är ekvivalent med $a = -b$ och en egenvektor är $1 - t$.

Alternativt kan man observera att i standardbasen har T matrisen $[T]_S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ och sen göra ”som vanligt”.

Övning 3.16. Om $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots)$ är en egenvektor till framåtskift gäller $F(x_1, x_2, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots) = \lambda(x_1, x_2, \ldots)$. Detta ger oss ekvationerna $\lambda x_1 = 0$, $\lambda x_2 = x_1$, $\lambda x_3 = x_2$, $\ldots$. Om $\lambda \neq 0$ ger detta $x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = 0$ så $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ och $\lambda \neq 0$ är inget egenvärde.

Om $\lambda = 0$ får vi $(0, x_1, x_2, \ldots) = 0(x_1, x_2, \ldots) = \mathbf{0}$. Alltså är $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ också nu och $\lambda = 0$ är inte heller något egenvärde (i något av fallen).

Om $B\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ där B är bakåtskift, $B(x_1, x_2, \ldots) = (x_2, x_3, \ldots)$ får vi ekvationerna $x_2 = \lambda x_1$, $x_3 = \lambda x_2$, $x_4 = \lambda x_3$, $\ldots$. Detta ger $x_2 = \lambda x_1$, $x_3 = \lambda^2 x_1$, $x_4 = \lambda^3 x_1$, $\ldots$. Så, för *alla* λ, är $\mathbf{x} = x_1(1, \lambda, \lambda^2, \lambda^3, \ldots) \in \mathbb{R}^\infty$ en egenvektor med egenvärdet λ.

I $\mathbb{R}_0^\infty$ måste $x_n \to 0$ så alla λ med $|\lambda| < 1$ är egenvärden. I $\mathbb{R}_{00}^I$ skall $x_n = 0$ för alla stora n, och alltså är bara $\lambda = 0$ ett egenvärde.

Övning 3.17. Villkoret $\dim \mathrm{Ran}\, T = 3$ betyder att $\lambda = 0$ är ett egenvärde med $\dim E_0 = 3$. Så den geometriska multipliciteten är 3. Enligt Övning 3.10 är den algebraiska multipliciteten också minst 3. Det karakteristiska polynomets grad är $\dim V = 5$ och har alltså ytterligare högst två (olika) nollställen.

Övning 3.18. Om λ är ett egenvärde till ST finns en vektor $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ så att $ST\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$. Om $\lambda \neq 0$ är $T\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ och $(TS)(T\mathbf{u}) = T(ST\mathbf{u}) = T(\lambda\mathbf{u}) = \lambda T\mathbf{u}$ och alltså är $T\mathbf{u}$

en egenvektor till TS med egenvärdet λ. Om $\lambda = 0$, och alltså $ST\mathbf{u} = \mathbf{0}$, är ST inte inverterbar. Då är inte heller TS inverterbar och har alltså också egenvärdet 0.

Övning 3.19. Låt $p(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \cdots + c_1 z + c_0$.

Antag att λ är ett egenvärde till T med egenvektor $\mathbf{u}$, $T\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$, $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$. Då gäller $T^k\mathbf{u} = \lambda^k\mathbf{u}$ och alltså $p(T)\mathbf{u} = \Big(c_n\lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + c_1\lambda + c_0\Big)\mathbf{u} = p(\lambda)\mathbf{u}$ och alltså är $p(\lambda)$ ett egenvärde till $p(T)$.

Andra hållet är svårare. Antag att $p(T)\mathbf{u} = a\mathbf{u}$, $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$. Ekvationen $p(z) = a$ har n komplexa rötter $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Så $p(z) - a = c(z - \lambda_1) \ldots (z - \lambda_n)$. Detta ger $p(T) - aI = c(T - \lambda_1 I) \ldots (T - \lambda_n I)\mathbf{u} = 0$. Som i Bevis 1 av Sats 3.5 ger detta att $(T - \lambda_k)\mathbf{v} = 0$ för något k och någon vektor $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Så λ_k är ett egenvärde och $a = p(\lambda_k)$.

Den första implikationen gäller också (med samma bevis) för reella vektorrum. Beviset ovan av den andra implikationen bygger på algebrans fundamentalsats och fungerar inte på reella vektorrum. Påståendet är heller inte sant som följande motexempel visar.

Låt R vara rotation $\pi/2$ radianer i $\mathbb{R}^2$. Då har R ingen (reell) egenvektor och alltså inget reellt egenvärde. (De komplexa egenvärdena är $\pm i$.) Men om $p(x) = x^2$ gäller $p(R) = R^2 = -I$ som har det dubbla egenvärdet -1.

Övning 3.20. Om $\mathbf{u}$ är en egenvektor med $S\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u}$ och $T\mathbf{u} = \beta\mathbf{u}$ gäller $TS\mathbf{u} = \alpha\beta\mathbf{u} = ST\mathbf{u}$. Eftersom T har olika egenvärden finns en bas av egenvektorer till T, $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$. Så om $\mathbf{x} \in V$ gäller $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$. Eftersom $ST\mathbf{e}_i = TS\mathbf{e}_i$ ger detta $ST\mathbf{x} = ST(x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n) = x_1 ST\mathbf{e}_1 + \cdots + STx_n\mathbf{e}_n$
$= x_1 TS\mathbf{e}_1 + \cdots + TSx_n\mathbf{e}_n = TS(x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n) = TS\mathbf{x}$ och S och T kommuterar.

Övning 3.21. Eftersom A är reell gäller $\overline{A} = A$. Så om $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ gäller $A\overline{\mathbf{v}} = \overline{A\mathbf{v}} = \overline{\lambda\mathbf{v}}$ $= \overline{\lambda}\,\overline{\mathbf{v}}$.

Övning 3.22. Egenvärdet λ_3 med $\dim E_\lambda = 3$ har geometrisk multiplicitet 3, och därmed algebraisk multiplicitet minst 3. Totalt har vi 5 egenvärden räknat med multiplicitet. Så de andra två egenvärdena måste vara enkla, och dessutom är den algebraiska multipliciteten för λ_3 lika med 3. Så för alla tre egenvärdena är den geometriska och algebraiska multipliciteten densamma och alltså är T diagonaliserbar.

Övning 3.23. T.ex. matrisen $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Den har det trippla egenvärdet 0 men den karakteristiska ekvationen har bara en fri variabel så $\dim E_0 = 1 < 3$ och A är inte diagonaliserbar.

Genom att konjugera med en koordinatbytesmatris och bilda PAP^{-1} får vi en matris som ser ”godtycklig ut” (eller hur?).

Om t.ex $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ blir $B = PAP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -5 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & -3 \end{pmatrix}$. (Varför är B inte diagonaliserbar?)

Övning 3.24. Enligt Övning 3.4 har A bara egenvärdet 0. Om A kan diagonaliseras finns det en bas B där $[A]_B$ är diagonal och med egenvärdena på diagonalen. Men de är alla 0 så $[A]_B$ är nollmatrisen. Men det motsäger att $A \neq 0$.

Övning 3.25. (a) Att $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ är egenvektor till T betyder att $A^T = \lambda A$, dvs.

$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Om a eller d inte är noll är $\lambda = 1$, och då måste dessutom $c = b$. Så E_1 har dimensionen 3 och består av alla symmetriska matriser. Om $a = b = 0$ har vi villkoren $b = \lambda c$ och $c = \lambda b$, som ger $b = \lambda^2 b$ och $c = \lambda^2 c$. Nu är minst en av b och c skild från noll så $\lambda^2 = 1$. Så även $\lambda = -1$ är ett egenvärde och E_{-1} består av alla matriserna $\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$.

(b) Javisst! Om $A = (a_{ij})$ får vi som i (a) att $a_{ii} = \lambda a_{ii}$, och om $i \neq j$, $a_{ij} = \lambda a_{ji}$ och $a_{ij} = \lambda^2 a_{ij}$. Så de enda egenvärdena är $\lambda = 1$ och $\lambda = -1$.

Egenrummet E_1 består av alla symmetriska matriser. Egenrummet E_{-1} består av alla skevsymmetriska matriser, dvs. de matriser som uppfyller $A^T = -A$.

Anmärkning. Låt E_{kl} vara matrisen där $a_{kl} = 1$ och $a_{ij} = 0$ då $(i, j) \neq (k, l)$. Då har E_1 basvektorerna $\mathbf{e}_k = E_{kk}$, och $\mathbf{e}_{kl} = E_{kl} + E_{lk}$ där $k > l$. E_{-1} har basvektorerna $\mathbf{f}_{kl} = E_{kl} - E_{lk}$ där $k > l$.

Eftersom $E_{kl} = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_{kl} + \mathbf{f}_{kl})$ då $k > l$ och $E_{kl} = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_{kl} - \mathbf{f}_{kl})$ då $k < l$, ser vi att $M_{n\times n} = E_1 \oplus E_{-1}$ så T är diagonaliserbar.

Ett annat sätt att se det är att räkna dimensionerna. De n^2 platserna i en $n \times n$-matris består av n diagonalelement och $2t_n$ ickediagonalelement där t_n är antalet element där $k > l$ (eller $k < l$). Så $n^2 = n + 2t_n$ vilket ger att $t_n = \frac{1}{2}(n^2 - n)$. Så dimensionen för E_1 är $n + t_n = \frac{1}{2}(n^2 + n)$ och för E_{-1} är den $t_n = \frac{1}{2}(n^2 - n)$. Alltså är $\dim E_1 + \dim E_{-1} = (n + t_n) + t_n = n + 2t_n = n^2 = \dim M_{n\times n}$.

Kapitel 4

Övning 4.1. Kalla avbildningen T. Den har egenvärdena 0 och 1. $\mathbf{e}_1 = (1, 0, -1)$ är en egemvektor till egenvärdet 0, och $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\mathbf{e}_3 = (1, 0, 1)$ är egenvektorer till egenvärdet 1. Vi observerar att $\mathbf{e}_1$ är vinkelrät mot både $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$ och $\mathbf{e}_3 = (1, 0, 1)$.

Om vi i basen $E : \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ har $[\mathbf{v}]_E = (x_1, x_2, x_3)$ så gäller $T\mathbf{v} = (0, x_2, x_3)$. Så T är ortogonal projektion på planet som spänns av $\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Men detta plan kan också beskrivas som det plan genom origo som är ortogonalt mot $\mathbf{e}_1$, och har alltså ekvationen $x_1 - x_3 = 0$.

Övning 4.2. (a) Matrisen har egenvärdet $2+i$ med egenvektorn $\mathbf{e} = (2, -(1+i))$. (Genom att ta konjugat följer att $(2, -1+i)$ är en egenvektor med egenvärdet $2-i$.) Låt B vara basen $\mathbf{e}_1 = \operatorname{Re}\mathbf{e} = (2, -1)$, $\mathbf{e}_2 = \operatorname{Im}\mathbf{e} = (0, -1)$. Då gäller $[A]_B = [I]_{BS}[A]_S[I]_{SB}$ där $[I]_{SB} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. En kalkyl (Gör den!) ger $[I]_{BS} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ och $[A]_B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Övning 4.13. Låt p_n vara antalet n fot långa gångar. Då är $p_1 = 1$ och $p_2 = 3$ (Varför då?). För att lägga en $n+2$ fot lång gång kan plattläggaren antingen

I. Börja med en liten platta och sedan lägga en $n+1$ lång gång, vilket går på p_{n+1} sätt,

eller

II. Börja med en stor platta, vilket går på 2 sätt, och sedan lägga en n lång gång vilket går på p_{n+1} sätt.

Så p_n uppfyller rekursionen

$$\begin{cases} p_{n+2} = p_{n+1} + 2p_n \\ p_1 = 1, \quad p_2 = 3 \end{cases} .$$

För att lösa detta skriver vi det som ett system av första ordningen. Låt $x_n = (p_n, p_{n+1})$. Då gäller

$$\mathbf{x}_{n+1} = \begin{pmatrix} p_{n+1} \\ p_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{n+1} \\ p_{n+2} + 2p_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_n \\ p_{n+1} \end{pmatrix} = A\mathbf{x}_n ,$$

där $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Så vi får $\begin{cases} \mathbf{x}_{n+1} = A\mathbf{x}_n, \ n = 1, 2, 3, \dots \\ \mathbf{x}_1 = (1, 3) \end{cases}$ och $\mathbf{x}_n = A^{n-1}\mathbf{x}_1$.

För att beräkna detta expicit observerar vi att en kalkyl (Gör den!) visar att A har egenvärdena -1 och 2 med egenvektorerna $\mathbf{e}_1 = (1, -1)$ respektive $\mathbf{e}_2 = (1, 2)$. Vi ser också att $\mathbf{x}_1 = \dfrac{1}{3}(-\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2)$. Detta ger $\mathbf{x}_n = A^{n-1}\mathbf{x}_1 = \dfrac{1}{3}(-A^{n-1}\mathbf{e}_1 + 4A^{n-1}\mathbf{e}_2) = \dfrac{1}{3}(-(-1)^{n-1}\mathbf{e}_1 + 4 \cdot 2^{n-1} 2\mathbf{e}_2)$. Första koordinaten i denna likhet ger slutligen $p_n = \dfrac{1}{3}(2^{n+1} + (-1)^n)$.

Övning 4.14. Vi låter $\mathbf{x}_n = (F_n, F_{n+1})$. Då gäller

$$\mathbf{x}_{n+1} = (F_{n+1}, F_{n+2}) = (F_{n+1}, F_n + F_{n+1}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = A\mathbf{x}_n$$

där $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Så vi får $\begin{cases} \mathbf{x}_{n+1} = A\mathbf{x}_n, \ n = 1, 2, 3, \dots \\ \mathbf{x}_0 = (0, 1) \end{cases}$, som har lösningen $\mathbf{x}_n = A^n\mathbf{x}_0$.

Vi har $p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 1$ med nollställena $\lambda_+ = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ och $\lambda_- = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. Observera att $\lambda_+ + \lambda_- = 1$ och $\lambda_+\lambda_- = -1$.

Anmärkning. $\lambda_+ \approx 1,62$ och $\lambda_- \approx -0,62$

Härnäst beräknar vi egenvektorerna. För egenvärdet λ_+ får vi, genom att subtrahera första raden multiplicerad med $-\lambda_-$ från den andra, att

$$A - \lambda_+ I = \begin{pmatrix} -\lambda_+ & 1 \\ 1 & 1-\lambda_+ \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -\lambda_+ & 1 \\ 1 & \lambda_- \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -\lambda_+ & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Så $\mathbf{e}_+ = (1, \lambda_+)$ är en egenvektor till egenvärdet λ_+.

På liknande sätt ser vi att $\mathbf{e}_- = (1, \lambda_-)$ är en egenvektor till egenvärdet λ_-.

Härnäst vill vi bestämma a_+ och a_- med $a_+\mathbf{e}_+ + a_-\mathbf{e}_- = \mathbf{x}_0 = (0, 1)$. Detta betyder $\begin{cases} a_+ + a_- = 0 \\ a_+\lambda_+ + a_-\lambda_- = 1 \end{cases}$, $\begin{cases} a_+ + a_- = 0 \\ a_+ + a_- + \sqrt{5}(a_+ - a_-) = 2 \end{cases}$ eller $\begin{cases} a_+ + a_- = 0 \\ a_+ - a_- = \frac{2}{\sqrt{5}} \end{cases}$.

Detta ger $a_+ = \frac{1}{\sqrt{5}}$ och $a_- = -\frac{1}{\sqrt{5}}$. Så $\mathbf{x}_n = A^n\Big(\frac{1}{\sqrt{5}}\big(A^n\mathbf{e}_+ - A^n\mathbf{e}_-\big)\Big) = \frac{1}{2^n\sqrt{5}}\Big((1+\sqrt{5})^n\mathbf{e}_+ - (1-\sqrt{5})^n\mathbf{e}_-\Big)$. Förstakoordinaten i denna likhet ger slutligen $F_n = \frac{1}{2^n\sqrt{5}}\Big((1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n\Big)$.

Övning. Visa att $F_{10} = 55$. (Detta är inte alldeles lätt från formeln för F_{10}. Kanske är det enklare att beräkna den med upprepade additioner i rekursionsformeln. Vad tycker du?)