CHALMERS | GÖTEBORGS UNIVERSITET

Matematik för LMN100
Hösten 2003

Carl-Henrik Fant
Matematik

3 oktober 2004

1 Problem och problemlösning

1.1 Syfte

Syftet med detta inslag i kursen är att du skall se värdet av problemlösning som ett ständigt närvarande inslag i all undervisning i matematik och att du själv skall öva upp din egen problemlösningsförmåga. Du skall se att problemlösning kan tjäna både som inspirations- och glädjekälla och som ett medel att nå djupare förståelse för matematik. Genom att erfara *hur* din egen förmåga kan övas upp och vilka kompetenser, tankar och idéer som bidrar till att man lyckas med problemlösning skall du också se vikten av att arbeta strukturerat med problemlösning genom hela skolmatematiken.
I detta kapitel ligger tonvikten på problemlösning i sig. Det kan finnas inslag i problemen som leder till ökad begreppsförståelse, men det är alltså inte huvudmålet i kapitlet.
I kursen kommer bl.a. problem för grundskoleelever att behandlas, dessa kan vara avsedda att utveckla elevens begreppsförståelse. Det är naturligtvis viktigt för en lärare att genomskåda detta och att kunna modifiera problem så de passar för olika syften och olika individer. Problem som syftar till att utveckla den lärarstuderandes begreppsuppfattning inom främst algebra och geometri behandlas i senare kapitel.

1.2 Litteratur mm.

Utöver denna text skall du arbeta med:
Frank K Lester: Problemlösningens natur, artikel i Nämnaren TEMA: Matematik −− ett kommunikationsämne.
Löwing & Kilborn, Baskunskaper i matematik, Kapitel 7, Problemlösning.
Problem ur Kängurutävlingen.

Några bra webbadresser där du hittar nyttiga länkar och/eller bra problem är:

NCM	www.ncm.gu.se	Läst&länkat
Nämnaren	namnaren.ncm.gu.se	Kängurusidan
Skolverket	lankskafferiet.skolverket.se	Naturvetenskap och matematik
IT-pedagogerna	www.f.komforb.se/it-pedagogerna/klurigt	Kluringar med lösningsförslag

1.3 Vad är ett problem?

Som påpekas av Löwing & Kilborn så används ordet problem på ett varierat sätt. Här kommer jag att reservera begreppet *problem* för en matematisk frågeställning som läsaren/lösaren förstår men inte har en, i förväg, färdig lösningsstrategi till. Andra matematiska frågeställningar kallar jag övningsuppgifter eller rutinuppgifter. Av detta följer att det som är ett problem för en läsare kan vara en övningsuppgift eller rutinuppgift för en annan. Skillnaden ligger i individernas olika erfarenheter.
Låt mig ge ett exempel:

Att finna de tal som skall stå i, eller ersätta, $\square$ respektive $\bigcirc$ då

$$\begin{cases} \square + \bigcirc = 13 \\ \square - \bigcirc = 3 \end{cases}$$

är ett genuint problem för en ung elev, som behärskar talområdet 0-20 och som tidigare löst uppgifter av typen $8+\bigcirc = 13$ men inte behärskar den algebra som man arbetar med senare i skolan.

För den som är van att lösa ekvationssystem är det en rutinuppgift som inte kräver någon ansträngning.

Problemets svårighetsgrad är också avhängigt av hur läsaren uppfattar begreppen, i detta fall addition. Det är troligt att den, som kan sambandet mellan addition och uppdelning av tal (talkamrater), tolkar och angriper problemet på ett annat sätt, än den som har en rent dynamisk uppfattning om addition. Man kan till exempel undersöka alla uppdelningar av 13 som summa av två tal. Det finns ändligt många och endast en ger differensen 3.
Om man tidigare kommit på denna strategi, eller fått den *serverad* så är det en övningsuppgift att upprepa proceduren. Som övningsuppgift kan den fortfarande ha stort värde eftersom idéer också behöver befästas.
Man skall också vara medveten om att problemet ändrar karaktär om eleven känner till annat än de naturliga talen. Det är då inte givet att det handlar om en uppdelning av talet 13 i två naturliga tal.

Den som försöker lösa följande ekvationssystem genom heltalsuppdelning kommer att finna att det inte är möjligt. Det krävs alltså något annat resonemang eller annan teknik.

$$\begin{cases} x + y = 12 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

Detta ekvationssystem är ett genuint problem för den som kan lösa ekvationer av typen $3 + 2y = 12$ men inte tidigare har arbetat med ekvationssystem. Man kan lösa systemet genom att själv komma på att den andra ekvationen ger $x = y + 3$ vilket kan sättas in i första ekvationen. Enkla kalkyler leder till ekvationen $3 + 2y = 12$.
För den som behärskar t.ex. eliminationsmetoden för att lösa ekvationssystem är också ovanstående exempel en rutinuppgift som kan lösas med huvudräkning.

Sammanfattningsvis kan sägas att:

Rutin-/övningsuppgifter karakteriseras av:	*Problem karakteriseras av:*
• Välkänd formulering	• Ny formulering som måste tolkas
• Välkänd tolkning	• Flera möjliga tolkningar, öppen fråga
• Tydligt vad som skall göras	• Krävs eftertanke att inse vad som skall göras
• Huvudsakligen en metod skall användas, denna är ”uppenbar”	• Kan krävas en kombination av flera metoder, vilken eller vilka är oklart.
• Lösningen består av ett fåtal steg	• Stor komplexitet, lösningen i flera steg
• Ett enda svar	• Flera alternativa svar

Därmed inte sagt att ett problems karaktär måste avvika från övningsuppgiftens på alla dessa punkter. Tvärtom, det räcker med *en* avvikelse för att tillföra något nytt och skapa ett problem av en övningsuppgift. För unga studerande kan detta vara tillräckligt, för mer erfarna bör naturligtvis antalet punkter, där problemet avviker från att vara en övningsuppgift, vara större.

Denna lista kan behöva utökas, se den som en start, en grund för en utvecklande diskussion.

1.4 Varför är problemlösning viktig?

Matematikens historia visar mycket tydligt att kunskapsbildningen i matematik drivs av att någon strävar efter att lösa ett problem som ingen annan löst tidigare eller på ett sätt som ingen tidigare använt. Även försök som ”misslyckats” har haft denna effekt. Nya begrepp har utvecklats, tidigare okända samband mellan begrepp har uppdagats.
Ett bra exempel på detta är arbetet med Fermats stora sats: Om n är ett heltal större än 2 så finns inga heltal $x,\ y,\ z$ skilda från 0 så att $x^n + y^n = z^n$. Det tog 350 år från det att Fermat påstod att han funnit ett bevis tills någon matematiker verkligen bevisade satsen.Under dessa 350 år skapades oerhört mycket matematik i syfte att förstå problemet på nytt sätt och att finna ett bevis. Ett annat exempel på hur en enkel fråga lett till en oerhörd matematisk utveckling finner vi i den grekiska matematiken. De sökte svar på den matematiska fråga som är enklast att formulera men oftast svårast att besvara: *Varför är det så?* och lade därigenom grunden till den deduktiva matematiken. Kanske de arbetade i en existerande tradition, det finns tecken på det, men vi kan inte veta.

Ett samhälles kunskap är summan av individernas kunskaper. Även om historien behandlar samhällets kunskapsbildning så kan vi dra slutsatsen att individens kunskapsbildning kan drivas på samma sätt då hon, enskilt eller tillsammans med andra, strävar efter att lösa problem. Problemen måste då vara väl valda om de skall användas som en del av undervisningen i syfte att utveckla eller fördjupa bestämd kunskap. Även misslyckade lösningsförsök kan då ha positiv effekt på individens kunskaper men naturligtvis är det bättre att lyckas. För att så många som möjligt skall få chansen att lyckas måste problemlösningsförmåga ses som en väsentlig färdighet alla skall få lov att utveckla.

Det kan dessutom vara kul och utmanande att arbeta med problem. Det kan locka fram ett matematiskt samtal som är berikande för alla inblandade. Båda dessa affekter är oerhört viktiga. Bland det som poängteras i rapporten ”Lusten att lära” (Skolverket 2003) finner vi just behovet av utmaningar och samtal.

Genom att man använder sin kunskap i nya situationer fördjupas kunskapen. Man tvingas analysera de begrepp som används på ett annat sätt än om man enbart tillåts/uppmanas reproducera färdiga lösningsmönster/algoritmer/procedurer. Den som själv genomskådat en metod bär den med sig på ett annat sätt än den som enbart memorerat den. Därmed inte sagt att man måste komma på alla metoder själv. Med väl valda problem kan man lockas till att genomskåda idéerna bakom de kända metoderna också.

Genom att arbeta med problemlösning kan beredskapen att ta till sig nya matematiska idéer ökas och nyfikenheten på matematik bevaras. Genom att fokusera enbart på räknefärdighet kan matematiken framstå som oerhört trist och andefattig. Att kunna matematik kan tolkas som att memorera och använda regler och metoder som *någon har hittat på*.

Skolans matematik måste innehålla såväl räkneträning som tillämpning (vardagsmatematik) och söndagsmatematik (problemlösning och teori).

1.5 Vad krävs för att utveckla problemlösningsförmåga

Jag citerar Frank K Lester:

> Elever måste lösa många problem för att utveckla god problemlösningsförmåga.
>
> Problemlösningsförmågan utvecklas långsamt under en lång period.
>
> Elever måste tro på att deras lärare tycker problemlösning är betydelsefull.
>
> De flesta tjänar på systematisk undervisning i problemlösning.

Jag vill själv framhålla att problemlösning kräver uthållighet. Eleven måste förstå att man aldrig kör fast vid problemlösning, man har bara ännu inte kommit framåt.
En slutsats jag drar av citatet ovan är att problemlösning skall ingå i all matematikundervisning, från förskola till universitet.
En annan är att alla som undervisar i matematik skall ha tränat upp den egna problemlösningsförmågan och ha så stor erfarenhet att de kan locka fram idéer hos sina elever, ta vara på de fruktbara och klokt styra åt rätt håll då idéerna inte är så väl genomtänkta.
Det är naturligtvis också oerhört viktigt att alla som undervisar i matematik vet hur elevernas problemlösningsförmåga kan utvecklas, hur systematisk undervisning i problemlösning kan gå till.

1.6 Några problemlösningsstrategier

Det är alltid vanskligt att försöka ge goda råd, så även i detta fall. Det kommer alltid att finnas mer att säga, en lista med strategier kan bli hur lång som helst. Se därför nedanstående lista som en början och komplettera själv efterhand med idéer du samlar, under kursens gång och i framtiden.

- Ägna tid åt att förstå problemet.

  Ge dig inte innan du förstått *hela* problemformuleringen. Om du inte förstår problemet så måste du först bli klar över *vad* du inte förstår, därefter kan du söka annan nödvändig information.

  De flesta problem formuleras med relativt komplicerad text. Kan denna text förstås på mer än ett sätt?

- Skriv ner dina tankar. Genom ordet fullbordas tanken.

- Kan texten översättas till matematiskt språk, formler, ekvationer etc. Inför enklare beteckningar för problemingredienserna.

- Försök åskådliggör problemet.

  En bild kan ibland göra det enklare att tala och tänka om problemet. Ibland är lösningen uppenbar då du illustrerat problemet klokt.

- Har du mött något liknande problem tidigare?

  Du kanske tidigare har löst ett specialfall och ställs nu inför en generell formulering?

- Försök förenkla problemet.

  Kanske ett specialfall är enklare och lösningen i specialfallet kan ge idéer till den sökta lösningen.

- Utgå från målet.

  En tänkt lösning kan ge dig idéer om vilka egenskaper lösningen har och därigenom ge idéer till hur lösningen skall upptäckas.

1.7 Några aritmetiska problem.

Jag ger inga svar till problemen. I vissa fall är svaret hela lösningen och kan naturligtvis inte ges. I andra fall kan ett givet svar förändra problemets natur. För att illustrera detta ger jag ett problem från Nämnarens Kängurutävling 2002, klassen Ecolier (åk 3-4).

19. Jannes mamma bakar pepparkakshjärtan. När hon tagit ut så många hjärtan som möjligt blir det deg över som hon kavlar ut igen. Om hon tar ut fyra hjärtan blir det deg över till ett hjärta till. Efter första kavlingen tar hon ut sexton hjärtan.

    Hur många hjärtan kan hon göra sammanlagt?

Utan svar är detta ett relativt öppet problem, man kan tänka sig en del olika idéer om hur baket går till. Det kanske blir mindre spill, relativt sett, om man har en stor deg kvar än om man har lite? Många tankar kan komma till tals.

Om man ger svarsalternativ så kan vissa sådana tankar överleva men inte alla. I tävlingen ges alternativen 5, 9, 17, 21 och 24. Här finns en viss öppenhet kvar men ganska snabbt kan vissa alternativ uteslutas och det är lätt att argumentera för resonemanget: Det blir fyra gånger så mycket deg kvar då man gör sexton hjärtan eftersom detta leder till ett av alternativen.
Ger man ett enda svar så indikerar det att det finns ett enda rätt sätt att resonera.

Då du arbetar med nedanstående problem bör du ha kursens syfte i tankarna. Målet är att du skall utveckla din problemlösningsförmåga och att du skall se vilka komponenter, tankar och idéer som gör att du lyckas. Gå igenom listan över strategier och se hur de olika kommer in och samspelar. Försök finna flera lösningar. Du kan försöka lösa problemen själv först. Ofta är det enklare att vara fler som samarbetar men det är sällan meningsfullt att vara fler än fyra, högst fem, i en problemlösningsgrupp.
Tänk på att det viktigaste är inte själva svaret, det är inte ens lösningen som leder till svaret utan vägen fram till att finna en lösning som leder till svaret.
Skriv därför ner alla era idéer, både de som inte ledde till lösning och de som var lyckosamma. På vilka sätt har ni utnyttjat de olika stragierna som ges i listan? Har ni utnyttjat någan annan idé som kanske borde finnas i listan? Försök hitta så många lösningsvägar som möjligt. Skriv också ner vad ni anser ni lärt er av att lösa problemet i fråga. Skriv slutligen ner era tankar om hur era och övriga gruppers samlade lösningar och reflektioner kan utnyttjas för att åstadkomma en systematisk undervisning om problemlösning i denna kurs.

(I vissa av problemen hänvisas till Sifferdjävulen av Hans Magnus Enzensberger. Denna vänder sig till barn men kan med behållning läsas av vuxna också. I boken behandlas matematik på ett lekfullt och respektlöst sätt. Boken är full av matematiska påståenden, några av dessa behandlas i problemen. All information som behövs för att förstå och lösa problemen finns i problemformuleringen.)

1. Du ska mäta upp 6 liter vatten i en spann som rymmer 9 liter. Till din hjälp har du en 4 liters-spann. Ingen av spannarna är graderad. Beskriv hur du ska gå tillväga. Det finns obegränsad tillgång med vatten.

   Vilka kalkyler ligger bakom din lösning? Hur kan problemet varieras? Kan man t.ex. mäta upp andra volymer eller är det något speciellt med 6 liter? Vilken matematik kan man lära sig av problemet?

2. Om man tar talet 555 och subtraherar det med talets siffersumma blir resultatet 555 - 15 = 540. Testar man istället talet 47 blir resultat 47 - 11 = 36. Båda resultaten finns i nians tabell. Är det en tillfällighet eller blir alltid resultatet ett tal i nians tabell, när man subtraherar ett positivt heltal med dess siffersumma?

3. I en klass (åk 1) sitter barnen och arbetar med matematik. De arbetar med grundläggande taluppfattning. Några håller på med talområdet 10 - 20 och har fått som uppgift att dels

lägga eller rita alla 14 -kamraterna, dels att skriva upp alla motsvarande additioner. Lisa, som är riktigt duktig i matte, har genomskådat systemet för länge sedan. Hon skriver snabbt $0 + 14 = 14,\ 1 + 13 = 14,\ \cdots\ 6 + 8 = 14,\ 7 + 7 = 14$ och slutar där eftersom hon vet att additionen är kommutativ. Uppgiften är alldeles för enkel för henne och därför tråkig. Hon säger ”Nu multiplicerar jag alla kamraterna istället”. Hon skriver $0 * 14 = 0,\ 1 * 13 = 13,\ \cdots\ 6 * 8 = 48,\ 7 * 7 = 49$. ”Så lustigt” , säger hon sedan, ”produkterna blir större och större”. Sedan beräknar hon differenser för produkterna $13 - 0$, $24 - 13$ o.s.v. och ser något annat hon finner märkligt. ”Fröken, titta här! Blir det alltid så?”

Undersök de fenomen Lisa observerade och finn förklaringar. Hur kan man förklara för Lisa?

4. Man ser att $1 * 1 = 1,\ 11 * 11 = 121, 111 * 111 = 12321$ och $1111 * 1111 = 1234321$. I Sifferdjävulen påstås detta mönster fortsätta. Är det sant? Hur långt i så fall? Vilka motiveringar kan du ge?

5. Med tre bollar kan man bilda en triangel, genom att först lägga två bollar så de tangerar varandra och sedan den tredje så att den tangerar de två första. Man kan sedan utöka denna till en större triangel med en tredje rad som innehåller tre bollar. Därefter med en rad som innehåller fyra bollar, o.s.v. Om vi tänker oss att en ensam boll representerar en liksidig triangel så har vi fått trianglar av växande storlek med en, två, tre eller fyra bollar i basen. Vi kan fortsätta triangelbygget ”obegränsat” med fem, sex, $\cdots$ bollar i basen. Antalet bollar i dessa trianglar är 1, 3, 6, 10, $\cdots$ o.s.v. Dessa tal kallar vi triangeltal eller med Sifferdjävulens språk (s.93) trekantiga tal. Det första triangeltalet är alltså 1, det andra är 3, det tredje 6, det fjärde 10 o.s.v.

   Beskriv hur dessa tal räknas ut med addition. Ge olika beskrivningar som tar hänsyn till olika läsares matematiska kunnande.

   Är 4656 ett triangeltal? Vilket i så fall?

   Försök finna en enkel ”formel” för beräkning av det n:te triangeltalet.

6. En ”barnkammarleksak” består av ett antal cirkulära plattor med olika diametrar: 3,5,7,9,11, $13 \cdots 21\ cm$. Vid lekens början ligger alla plattorna i en stapel med den största plattan underst och sedan i avtagande storlek. Leken går nu ut på att flytta alla plattorna så att de ligger i samma ordning på annan plats genom att flytta dem en och en. Under flyttningen får man aldrig ha fler än tre högar och aldrig lägga en större platta på en mindre. Man får flytta en platta tillbaka till en plats där den legat tidigare.

   För att underlätta kan man ha hål i centrum av plattorna och en bräda med tre stavar som fungerar som stöd för högarna.

   Hur skall man göra för att använda så få flyttningar som möjligt? Hur många flyttningar använder man då? Hur blir det om man har 100 plattor? Kan du säga något generellt?

7. Utgå från en kvadrat. Dela in denna i mindre kvadrater, alla exakt lika stora. Antalet småkvadrater kallas för ett kvadrattal. I Sifferdjävulen kallas de fyrkantiga tal och är antalet

iskuber i en kvadrat. De fem första kvadrattalen är 1, 4, 9, 16, och 25. I Sifferdjävulen påstås att summan av två på varandra följande triangeltal alltid är ett kvadrattal. Vi ser t.ex. att 6+10=16 som är ett kvadrattal. Är det alltid så? Varför det i så fall? Vilka olika motiveringar kan du ge?

8. På en cirkels periferi markeras ett antal olika punkter. Sedan förbinds alla dessa punkter med varandra med räta linjer. Hur många linjer blir det? Hur varierar antalet linjer med antalet punkter på periferin?

   Vissa av linjerna skär varandra, andra inte. Beroende på punkternas placering på periferin kommer antalet skärningspunkter att variera. Hur många skärningspunkter kan det bli som mest om man inte räknar de som ligger på periferin? Hur varierar antalet skärningspunkter med antalet punkter på periferin?

   Linjerna delar in cirkelskivan i områden som inte genomkorsas av någon linje.Har man två punkter blir det en enda linje. Denna delar in cirkelskivan i två områden. Tre punkter ger tre linjer och fyra områden. Hur varierar det maximala antalet områden med antalet punkter?

9. En magisk 3×3-kvadrat består av ett kvadratiskt rutmönster med nio rutor. I detta rutmönster skrivs talen 1, 2, 3, $\cdots$, 9 in på ett sådant sätt att summorna av talen i varje horisontell eller vertikal rad och varje diagonal är samma. Konstruera en magisk 3×3-kvadrat. Undersök om det finns flera möjligheter. Är det möjligt att konstruera magiska kvadrater med andra tal än 1, 2, 3, $\cdots$, 9? Gör det i så fall.

10. Här är början till en magisk 4×4-kvadrat med talen $1,\ 2,\ 3,\ \cdots\ 16$:

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & 2 \\ h & i & 9 & 16 \\ j & 15 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

   Med denna start kan en mycket magisk kvadrat konstrueras, man kan fördela de återstående talen så att inte bara summorna av talen i de horisontella och vertikala raderna och de två hörn-till-hörn diagonalerna är lika utan också i de andra sex ”diagonalerna” som $b + g + 16 + j$ eller $b + e + 16 + 4$.

   Komplettera kvadraten.

   Rita sedan en 8×8-kvadrat och skriv in 4×4-kvadraten fyra gånger. Välj ut, helt slumpmässigt, en 4×4-kvadrat i 8×8-kvadraten. Du har nu en magisk kvadrat. Varför är det så?

11. Konstruera annan/andra symmetrisk(a) ”magisk(a)” figur(er), t.ex. en annan 4×4-kvadrat eller några som du skulle kunna använda i undervisningen. Figurerna behöver inte leda till svåra problem utan kan vara relativt enkla men där systematiskt arbete är lönande. Vad vill du eleverna skall lära av att lösa ditt problem?

12. En potatishandlare har en balansvåg och fyra olika vikter. Han påstår att han med dessa vikter direkt kan väga upp potatissäckar som innehåller allt från ett till fyrtio kilo (bara hela kilo). Han skapar alltså inte nya vikter med hjälp av de fyra. Vilka vikter har han?

13. Fibonaccitalen, $F(n)$, (bonatscital enligt Sifferdjävulen) definieras av att det första $F(1) = 1$, det andra $F(2) = 1$, det tredje $F(3) = F(1) + F(2) = 1 + 1 = 2$, det fjärde $F(4) = F(2) + F(3) = 1 + 2 = 3$, det femte $F(5) = 2 + 3 = 5$. Sedan följer 3+5=8, 5+8=13 osv. Allmänt gäller alltså att $F(n) = F(n - 2) + F(n - 1)$. Räkna först ut ett tiotal fibonaccital och beräkna sedan summan av de tre, fyra, fem, första fibonaccitalen. Ser du något samband? Beräkna annars summan av de sex, sju, osv första talen. Då du funnit ett samband försök avgöra om det är allmängiltigt.

14. Beräkna $(F(n))^2 + (F(n+1))^2$ för några olika värden på n. Du bör få ett nytt fibonaccital. Vilket? Gäller detta alltid? Förklara i så fall varför?

15. Tre bröder, låt oss kalla dem Anshi, Biao och Chao, brukade en gård i närheten av Yangzifloden. De odlade ris som de sålde på marknaderna i närheten. För inkomsten på riset skulle de betala skatt till kejsaren Yuan Di. En av kejsarens skatteindrivare besökte bröderna och dessa redogjorde för sin risförsäljning. De hävdade att årets överskott varit 804 catty (det gamla kinesiska viktmåttet catty motsvarar ca 600 gram). Detta överskott hade de delat i tre lika delar och var för sig tagit med sig till olika marknader. Detta hände, som alla förstått omkring år 320 och alltså långt före SIS och DIN och ISO 9000. Vid de olika marknaderna användes olika enheter vid rishandel. Där Anshi sålde var risenheten 3 catty, 5 catty där Biao sålde och 7 catty på Chaos marknad. På grund av att de måste sälja hela risenheter hade de alla lite med hem efter försäljningen. Anshi hade 2 catty, Biao hade 3 och Chao hade 2 catty kvar. Dessa 7 catty sålde de i hembyn vilket grannarna intygade.

    Den i aritmetik väl bevandrade tjänstemannen plockade en liten stund med sina räknestavar och utropade Ni ljuger! Ni har sålt 1014 catty.

    Bröderna blev bestörta eftersom tjänstemannen hade rätt. Hans kunskaper måste vara magiska! De erkände omedelbart men kunde aldrig förstå hur de blev avslöjade.

    Denna historia är givetvis sann och hämtad ur en kinesisk lärobok från 300-talet, naturligtvis inte ordagrannt. Din uppgift är att förklara hur tjänstemannen kunde veta att bröderna ljög och hur han kom fram till 1014 catty.

2 De naturliga talens aritmetik

2.1 Syfte

Syftet med detta inslag i kursen är att du skall lära dig mer om de naturliga talens aritmetik. Du skall arbeta med olika samband som gäller vid räkning med naturliga tal. Du skall se att vissa av dem är mer grundläggande och självklara än andra, dessa kallas här räknelagar. Andra samband kan motiveras med de mest grundläggande, denna typ av samband kallas här räkneregler. Du skall också lära dig att ge olika typer av argument för att räknelagarna/reglerna gäller. Du skall även se samspelet mellan aritmetik och algebra, hur algebraisering kan leda till djupare förståelse av aritmetiken och samtidigt hur förståelse för aritmetiken lägger grunden för en förståelse av de algebraiska idéerna. Längre fram skall du se hur man, om man utgår endast från de naturliga talen, kan ”bygga upp” heltalen, de rationella talen och de reella talen på ett ganska strikt matematiskt sätt. Då är just förståelsen för räknelagarna och algebraiseringen avgörande för resonemangen.

2.2 Inledning och historisk återblick

Som framhållits under introduktionen till denna inriktning (under TVÄR-kursen LAU150) har människans strävan att göra det omöjliga möjligt varit grunden till utveckling av nya idéer.
Då vi ser tillbaka på forna högkulturer finner vi att de redan tidigt utvecklade beteckningar för såväl naturliga tal som rationella tal. Babylonierna kunde med sin kilskrift och sitt hexadecimala talsystem, som utvecklades redan på 3000-talet fvt., framställa tal såsom $\frac{7}{60}$, $\frac{5}{3600}$ mm. Jag har inte för avsikt att gå in på detta nu.
Grekerna ägnade stor möda åt att undersöka vilka tal, eller snarare förhållanden mellan sträckors längder, som var möjliga att konstruera med passare och ograderad linjal (detta behandlas senare i geometrikursen). Man kan utan svårighet konstruera en sträcka vars längd är en (hel) multipel av en given sträcka så är alla naturliga tal konstruerbara. Vi kan också dela en sträcka i ett godtyckligt antal lika delar (jmfr en av övningarna i geometrikursen). Således är alla rationella tal $\frac{n}{m}$ konstruerbara.
Också en del andra längder är konstruerbara, tex $\sqrt{n}$ om n är ett naturligt tal (anm. $\sqrt{n}$ är det positiva tal som uppfyller att $\sqrt{n} * \sqrt{n} = n$) . Att $\sqrt{n}$ är konstruerbart kan inses på följande sätt: Konstruera först en kvadrat med sida 1, diagonalen i denna har sidan $\sqrt{2}$. Konstruera sedan en rektangel med sidorna 1 och $\sqrt{2}$. Diagonalen i denna har längden $\sqrt{3}$. Konstruera därefter en rektangel med sidorna 1 och $\sqrt{3}$. Diagonalen i denna har längden $\sqrt{4}$. Denna procedur kan upprepas igen och igen. Vi ser då att alla kvadratrötter $\sqrt{n}$ kan konstrueras.
Det finns andra längder som inte är konstruerbara, t.ex. $\sqrt[3]{2}$ som är det positiva tal som uppfyller att $(\sqrt[3]{2})^3 = 2$. Det tog lång tid innan matematiker bevisat att $\sqrt[3]{2}$ inte är konstruerbart, det är med andra ord omöjligt att konstruera en kub med volymen 2. Att det är på det viset beror kort sagt på att den polynomekvation av lägst grad som har lösningen $\sqrt[3]{2}$ är $x^3 - 2 = 0$. Det finns ingen andragradsekvation med heltalskoefficienter som har lösningen $\sqrt[3]{2}$. Konstruerbara tal är alltid lösningar till andragradsekvationer där koefficienterna är andra konstruerbara tal.
Pythagoreernas tankar om tal (500-talet fvt.) byggde på idén att alla storheter var jämförbara.

Hade man två sträckor, AB och CD fanns det alltid en tredje, EF, som var sådan att de andra två var multipler av denna, $|AB| = k|EF|$ och $|CD| = n|EF|$. Förhållandet mellan de två storheterna, $|AB| : |CD|$ var alltså enligt pythagoreerna alltid rationellt $k : n$. Det var naturligtvis uppskakande då en av dem (enligt myten) upptäckte och bevisade att förhållandet mellan diagonalen i en kvadrat och dess sida inte är rationellt. Under 400-talet fvt. visade Theodoros från Kyrene att inte bara $\sqrt{2}$ utan också $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$ $\sqrt{8}$ $\sqrt{10}$ $\sqrt{11}$ $\sqrt{12}$ $\sqrt{13}$ $\sqrt{14}$ $\sqrt{15}$ och $\sqrt{17}$ är irrationella.
Man kan ge naturligtvis ange rationella tal vars kvadrat är mycket nära 2, men det finns inget vars kvadrat är exakt 2. Babylonierna använde (ca 1500 fvt.) närmevärdet $\sqrt{2} \approx 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{3600} + \frac{10}{216000}$. Med vårt skrivsätt: $\sqrt{2} \approx \frac{30547}{21600} \approx 1.4142130$. Numera kan vi lätt bestämma ett mycket stort antal (miljontals) korrekta decimaler och vet att $\sqrt{2} \approx 1.4142136$

Man skulle kunna säga att $\sqrt{2}$ inte fanns som ett tal för pythagoreerna även om de kunde konstruera en sträcka vars längd var $\sqrt{2}$. Lite senare förändrades synen på tal så att även $\sqrt{2}$ kunde accepteras. Runt 130 (evt) gav Theon från Smyrna en metod för beräkning av $\sqrt{2}$. Med hans metod kunde man erhålla hur bra närmevärde som helst. Metoden är enkel och genial. Den används fortfarande för att lösa ekvationer.

Först över tvåtusen år senare lyckades man utvidga talbegreppet och införa de reella talen på ett formellt acceptabelt sätt. Numera tänker vi ju på $\sqrt{2}$ som *ett oändligt decimalbråk*. Detta är allt annat än oproblematiskt: Vad menar man egentligen med detta? Vilken är den triljonte decimalen i $\sqrt{2}$?
En annan fråga av samma typ är: Är det skillnad på 0.5 och $0.499999999999\cdots$? (Symbolen $\cdots$ betyder att raden nior skall fortsätta "*i oändlighet*".)

Indierna utvecklade det babyloniska positionssystemet, de införde basen 10 och en särskild symbol för talet 0. Det var också de som införde negativa tal. Det finns dokumenterat sedan 1000-talet att negativa tal användes i ekonomiska sammanhang för att representera skulder.
Indiernas upptäckter/uppfinningar övertogs av araberna och så småningom av de europeiska matematikerna. De italienska matematikerna Tartaglia och Cardano använde negativa tal för att lösa ekvationer kring 1540 men det det dröjde ytterligare ett par hundra år innan acceptansen var utbredd.
Man kan naturligtvis bara spekulera om orsaken till att det tog tid innan europeerna accepterade de negativa talen helt. En möjlig förklaring är att de fyra räknesätten, som är "självklara" för de naturliga talen, inte kan förklaras lika enkelt då det gäller negativa tal.
Något förvånande kanske att de negativa talen och de komplexa (som inkluderar talet i vars kvadrat är -1) accepterades ungefär samtidigt. En mycket trolig förklaring är att acceptansen hängde samman med algebrans utveckling. Det kan också bidragit att uppfattningen om matematik i allmänhet och tal i synnerhet blev mer filosofisk. Ett sätt att tänka är: Matematiska begrepp uppfinns, de upptäcks inte.
Då vi numera introducerar de negativa heltalen (i skolan) så motiverar vi detta gärna med att det finns ett behov av dem. Behovet kan vara att vi behöver kunna ange temperaturer under vattnets fryspunkt. På sätt och vis är detta behov konstlat. Vi skulle kunna byta temperaturskala till Kelvin

i stället för $°C$. I den skalan är alla temperaturer positiva då ju $0\ K$ motsvarar att inget rör sig. Det vore nog trots allt ett opraktiskt byte, vanans makt är stor.
Temperaturmätning växte fram från slutet av 1500-talet (Galilei) och ”fullbordades” under 1700-talets första hälft av Celsius som införde en 100-gradig skala för vattentemperaturer och Linné som insåg att det var mest praktiskt att is hade temperaturen 0 och ånga temperaturen 100 i stället för tvärt om. Då hade man redan de negativa talen att tillgå och kunde från början tala om temperaturer under 0.
Om temperaturmätning eller annan mätning vore den enda tillämpningen av negativa tal skulle vi inte ha behov av att kunna räkna med dem i någon större utsträckning. Vi hade i stort sett klarat oss med differenser: *om det är* $15°C$ *på dagen och* $-5°C$ *på natten så är temperaturskillnaden* $20°C$ och med addition eller subtraktion med positiva tal: *nattemperaturen var* $-5°C$ *men temperaturen steg under dagen med* $15°C$ *till* $10°C$ eller *dagtemperaturen var* $15°C$ *men temperaturen föll under natten med* $20°C$ *till* $-5°C$.
Historiskt sett är bokföring av tillgångar och skulder den naturliga starten för de negativa talen. Detta motiverar också att man adderar och subtraherar både positiva och negativa tal.
Dessa exempel ger strängt taget inte någon klar anledning att man skall kunna multiplicera och dividera negativa tal. Inte heller ger det några tankar som belyser frasen ”*minus minus är plus*”.
Den matematiska utvecklingen kom i samband med ekvationslösning: *ekvationen* $x^2+3x-4=0$ *har en positiv lösning* $x=1$ *och en negativ lösning* $x=-4$. För att kunna kontrollera och förstå att -4 är en lösning måste vi kunna multiplicera negativa tal med varandra och med positiva tal. Vi måste också kunna addera och subtrahera negativa och positiva tal, vi måste kunna konstatera att $(-4)^2+3*(-4)-4=0$.

2.3 Talsystemet

Ett väsentligt begrepp inom matematiken är *mängd*. Vi skall inte gå närmare in på begreppet utan nöjer oss med en intuitiv och oprecis uppfattning. Den grundläggande idén är att vi, på en gång, vill kunna tala om alla objekt av en viss typ.
Vi har t.ex. de *naturliga talen* — 0, 1, 2, 3, 4, 5, $\cdots$ De tre punkterna $\cdots$ står för att raden av tal fortsätter på ett välkänt sätt och utan slut. Det finns inget största naturligt tal, vi kan inte ge en lista som innehåller alla. Tillsammans utgör alla dessa tal *mängden av alla naturliga tal*. Denna mängd betecknas ofta N och vi skriver $N=\{0,1,2,3,4,5,\cdots\}$.
Mängden N är en del av de *hela talen* — 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, $\cdots$ Denna mängd betecknas ofta Z. De hela talen är i sin tur en del av de *rationella talen*, Q,: alla bråk $\frac{n}{m}$ där m och n är heltal och $m \neq 0$.
Denna mängd är i sin tur en del av de *reella talen, R,* som är en del av de *komplexa talen,* C.
Då vi bygger upp talsystemet går vi ofta från de naturliga talen till heltalen. Därefter till de rationella talen, de reella talen och slutligen de komplexa talen. Trots att den historiska utvecklingen som nämnts ovan tagit en något annan väg. De positiva rationella talen kom före de negativa talen.
Ur matematiska synvinkel spelar det ingen roll om man behandlar positiva rationella tal före negativa heltal. Förstår man hur negativa heltal kan införas med de naturliga talen som utgångspunkt så är det relativt problemfritt att göra motsvarande om man utgår från de positiva rationella

talen istället.

2.4 En liten introduktion till algebra

Som nämnts ovan var algebrans utveckling en av de troliga orsakerna till att motståndet mot negativa tal slutligen försvann. Skälet till detta är att algebran ger oss möjlighet att undersöka egenskaper hos de olika talmängderna. Denna undersökning kan övertyga oss om att det är möjligt att utöka vår arsenal av tal utan att det leder till någon motsättning. Det vore ju faktiskt en katastrof om vi använder oss av tal och räkneregler som så småningom visar sig leda till att $0 = 1$. Nu vet vi, tack vare algebran, att vare sig de negativa talen eller de reella eller de komplexa talen leder till någon sådan motsättning.

Många har kanske ett minne av skolans algebraverksamhet som ett mer eller mindre obegripligt, kanske också ointressant, manipulerande med bokstäver enligt ett antal rituella mönster som man var tvungen att memorera som mantra. Det är inte den verksamheten vi skall återuppta här.

De rituella mönster och procedurer man använder vid ”bokstavsräkning” är konsekvenser av allmängiltiga och i vissa fall självklara räkneregler för räkning med tal. Om man tvingats memorera procedurerna som mantra beror detta troligen på att räknereglerna tidigare varit osynliga. Vi skall här utnyttja algebra för att göra reglerna synliga men också för att argumentera för att de mindre självklara reglerna faktiskt också är korrekta.

Hur kommer algebra in i vår förståelse av talens värld?

2.4.1 Kommutativa lagen vid addition av naturliga tal

Låt oss, som exempel, se på, en för alla välkänd och oomtvistad egenskap hos de naturliga talen, kommutativiteten.
Vi vet att om vi har tre äpplen och får två till, så har vi lika många, som den som från början har två äpplen och som får tre till. Vi vet också att fem karameller kan delas upp i två påsar med två karameller i denena och tre i den andra. Det finns ingen riktning i denna uppdelning, den kan tecknas $5 = 2 + 3$ eller $5 = 3 + 2$. Vi vet intuitivt och av erfarenhet att $3 + 2 = 2 + 3$. Detta kan uttryckas som att additionen av talen 2 och 3 är kommutativ. Vi vet naturligtvis också att talen 2 och 3 i detta sammanhang enbart tjänar som exempel, vi kan ersätta dem med vilka andra tal som helst.
Hur kan vi, utan exemplifiering (2 och 3 ovan) och generalisering (ersätta med andra tal) från detta, uttrycka att kommutativitet är en generell egenskap hos addition av naturliga tal?

Här kommer algebran in. Tänk på att 2 och 3 är symboler för specifika naturliga tal. Då vi generaliserar och säger att 2 och 3 kan ersättas med vilka andra naturliga tal som helst så säger vi med andra ord att oavsett vilka talsymboler vi skriver in istället för 2 och 3 så gäller likheten (samma summa oavsett ordning).
Om vi här lämnar vårt sätt att skriva tal så kan vi istället låta helt andra symboler, t.ex $\diamond$ och $\lhd$, representera godtyckliga naturliga tal. Då kan kommutativiteten uttryckas med $\diamond + \lhd = \lhd + \diamond$.
Vi kan således formulera en allmängiltig *räknelag*.

Kommutativa lagen: För alla naturliga tal $\diamond$ och $\triangleleft$ gäller det att $\diamond + \triangleleft = \triangleleft + \diamond$.

Tyvärr är ovanstående mening svårläst, symbolerna som används har inga naturliga namn. Här krävs en ordlista, t.ex $\diamond$ = diamant och $\triangleleft$ = vänsterriktningspil.
Ordlistan gör att vi kan läsa ut meningen men innebörden försvinner troligen i symbolernas namn. Än värre blir det om vi behöver använda fler symboler.

För att undvika denna typ av komplikation håller vi oss till välkända symboler som har korta namn, bokstäverna. Det är onekligen enklare att utläsa följande:

Kommutativa lagen: För alla naturliga tal a och b gäller det att $a + b = b + a$.

Vi måste emellertid vara medvetna om att här skapas en ny komplikation, bokstäverna har en egen innebörd men ges nu en ny. Dessutom används båda innebörderna samtidigt eftersom vi också använder det skrivna språket. Fördelarna är dock långt större än nackdelarna, därför har ”bokstavsräkning” blivit en del av matematikens språk.

Varför skall man intressera sig för en så självklar regel? Ett skäl är att det finns situationer (som inte handlar om räkning med tal) då regeln *inte* gäller. Ett annat, i detta sammanhang långt viktigare, är att regeln tillsammans med alla andra är väsentlig då vi skall förstå oss på negativa tal.

2.4.2 Ett icke-kommutativt exempel

Låt oss, bara för tydlighetens skull, arbeta lite med just en sådan situation, en där kommutativa lagen inte gäller.

Tänk dig ett träpussel med en enda pusselbit, en liksidig triangel. Denna skall passas in i ett motsvarande hål i en träram. På triangeln är hörnen markerade med bokstäverna A, B och C. Vid hålets hörn står siffrorna 1,2 och 3. På triangelns ovansida sitter en liten knopp som man kan lyfta den i. Trianglen kan alltså inte läggas med undersidan upp utan kan passas in i hålet på tre sätt.
Om trianglen ligger i hålet så kan vi utföra tre olika procedurer:

1. Lyft upp triangeln och lägg tillbaka den lika dant.
2. Lyft upp, vrid 120° moturs, lägg tillbaka.
3. Lyft upp, vrid 120° medurs, lägg tillbaka.

Dessa tre procedurer betecknar vi $\bullet$, $\circlearrowleft$, $\circlearrowright$.
Vad händer nu om vi utför två procedurer eftervarandra? T.ex. om vi först vrider moturs och sedan medurs? Eller två gånger moturs?

Vi ser att om vi först vrider moturs och sedan medurs så är slutresultatet samma som om vi endast lyfter och lägger ner triangeln på samma sätt som den låg. Om vi vrider två gånger moturs så åstadkommer vi samma som med en medursvridning.
Vi inför en ny beteckning och låter $*$ stå för att sätta samman procedurer. Så betyder t.ex $\circlearrowleft * \circlearrowright$ att vi först vrider moturs och sedan medurs. Vi läser som vanligt från vänster till höger $\circlearrowleft$ utförs först, därefter utförs $\circlearrowright$. Uppenbarligen gäller $\circlearrowleft * \circlearrowright = \bullet$
På detta sätt har vi infört tre objekt, procedurerna $\bullet$, $\circlearrowleft$ och $\circlearrowright$ och en *kompositionsregel* $*$ för dessa objekt. Vi kan redovisa kompositionsregeln i en *kompositionstabell*.

$*$	$\bullet$	$\circlearrowleft$	$\circlearrowright$
$\bullet$	$\bullet * \bullet = \bullet$	$\bullet * \circlearrowleft = \circlearrowleft$	$\bullet * \circlearrowright = \circlearrowright$
$\circlearrowleft$	$\circlearrowleft * \bullet = \circlearrowleft$	$\circlearrowleft * \circlearrowleft = \circlearrowright$	$\circlearrowleft * \circlearrowright = \bullet$
$\circlearrowright$	$\circlearrowright * \bullet = \circlearrowright$	$\circlearrowright * \circlearrowleft = \bullet$	$\circlearrowright * \circlearrowright = \circlearrowleft$

eller mer kompakt:

$*$	$\bullet$	$\circlearrowleft$	$\circlearrowright$
$\bullet$	$\bullet$	$\circlearrowleft$	$\circlearrowright$
$\circlearrowleft$	$\circlearrowleft$	$\circlearrowright$	$\bullet$
$\circlearrowright$	$\circlearrowright$	$\bullet$	$\circlearrowleft$

I den andra tabellen redovisas endast resultaten av kompositionen. Jämför detta med additions- eller multiplikationstabellerna:

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	3
2	2	3	4

respektive

$\times$	1	2	3
1	1	2	3
2	2	4	6
3	3	6	9

Vi tar nu bort knoppen på triangeln så att den också kan vändas med undersidan upp. Vi tänker oss också att dessa båda sidor är identiska, det hörn som på ovansidan är markerat A är också på undersidan markerat med A. Motsvarande gäller för de andra hörnen. Nu kan vi tillåta ytterligare tre procedurer:

4. Vänd triangeln så att det övre hörnet ligger still.
5. Vänd triangeln så att det högra nedre hörnet ligger still.
6. Vänd triangeln så att det vänstra nedre hörnet ligger still.

Dessa tre betecknar vi i ordning $\downarrow$, $\nwarrow$ respektive $\nearrow$. Om vi tänker oss att triangeln roteras med en viss axel som rotationsaxel så visar respektive pils riktning vilken rotationsaxel som åsyftas.

Vi kan nu utöka kompositionstabellen ovan.

$*$	$\bullet$	$\circlearrowleft$	$\circlearrowright$	$\downarrow$	$\nwarrow$	$\nearrow$
$\bullet$	$\bullet$	$\circlearrowleft$	$\circlearrowright$			
$\circlearrowleft$	$\circlearrowleft$	$\circlearrowright$	$\bullet$			
$\circlearrowright$	$\circlearrowright$	$\bullet$	$\circlearrowleft$			
$\downarrow$						
$\nwarrow$						
$\nearrow$						

Vissa rutor är lätt att fylla i, andra kräver mer eftertanke och kanske konkret material i form av papperstriangel eller liknande. Nedan ges den ifyllda tabellen eftersom den behövs för den fortsatta diskussionen. Läsaren bör naturligtvis själv producera tabellen också.

∗	•	↺	↻	↓	↖	↗
•	•	↺	↻	↓	↖	↗
↺	↺	↺	•	↗	↓	↖
↻	↻	•	↺	↖	↗	↓
↓	↓	↖	↗	•	↺	↻
↖	↖	↗	↓	↻	•	↺
↗	↗	↓	↖	↺	↻	•

Ur tabellen kan vi utläsa att t.ex. ↓ ∗ ↺ = ↖ och att ↺ ∗ ↓ = ↗.

Ordningen, i vilken procedurerna utförs, har betydelse. *Den kommutativa lagen gäller* **inte**.

Sammanfattningsvis har vi här bestämt en mängd med sex element (objekt), de sex procedurerna. Låt oss kalla den mängden G. Vi har alltså att $G = \{$ • ↺ ↻ ↓ ↖ ↗ $\}$. I denna mängd har vi också *definierat* en kompositionsregel $*$ som uppfyller att till varje par av element i G ordnas ett bestämt element i G. Vi har också konstaterat att kommutativa lagen inte gäller i G med denna kompositionsregel.

Övning 1: Tillverka en pappersmodell av ”pusslet”. Skriv upp hörnens positioner efter det procedurerna genomförts om utgångsläget före varje procedur är A vid 1, B vid 2 och C vid 3. Utför sedan två procedurer i följd och jämför slutläget med det du fick för de enskilda procedurerna. På deet viset kan du själv fylla i kompositionstabellen och kontrollera huruvida den som ges ovan är korrekt. □

Övning 2: Byt ut triangeln mot t.ex. en kvadrat och bestäm de olika procedurer som leder till olika position för kvadratens hörn. Gör en kompositionstabell för denna □

2.5 Räknelagar och räkneregler för addition av naturliga tal

Vissa av de generella sambanden för addition av naturliga tal är så viktiga och grundläggande att de kallas räkne*lagar* och ges speciella namn. Andra generella samband kan sedan ses som konsekvenser av lagarna. Dessa samband kallas här räkne*regler*. Valet av lagar kan tyckas lite slumpartat men principen är att de skall vara enkla att förstå, giltigheten skall vara ”uppenbar” eller åtminstone inte kräva omfattande argument.

Räknelagarna, de viktigaste sambanden, som gäller för alla naturliga tal a, b och c vid addition är:

0. $a + b$ är ett välbestämt naturligt tal.
1. $0 + a = a$ (0 är neutralt element för addition)
2. $a + b = b + a$ (kommutativa lagen)
3. $(a + b) + c = a + (b + c)$ (associativa lagen)

4. $a + c = b + c \Rightarrow a = b$ (annulleringslagen)

Den första räknelagen, som säger att $a + b$ är ett välbestämt naturligt tal, innebär att t.ex 2 + 3 alltid är samma tal – det är alltid 5. Ett annat sätt att uttrycka detta är att kompositionsregeln $+$ till varje par av naturliga tal ordnar ett naturligt tal.

En möjlig tolkning av annulleringslagen ges i följande **räknesaga**: *Jag har två påsar med karameller, jag vet inte om det är lika eller olika antal karameller i de två påsarna. Sedan lägger jag i ytterligare ett antal karameller i båda påsarna, lika många i båda. Då jag sedan räknar karamellerna finner jag att det är samma antal i dem. Då vet jag att det var samma antal från början.*
Genom att tolka ett samband med en räknesaga kan man göra sambandet troligt. Läsaren kan övertyga sig om att den slutsats man kan dra av sambandet är samma som den man drar i en viss praktisk räknesituation. Att därav dra slutsatsen att sambandet verkligen är allmängiltigt kan vara förhastat. För att *bevisa* att räknelagarna ovan gäller, krävs i allmänhet argument som utgår från talens egenskaper. Dessa resonemang ligger bortom målen för denna kurs.

Ett annat sätt att tänka om annulleringslagen är att om vi gör två olika uppdelningar av en viss mängd och finner att två av delarna i de två uppdelningarna har samma antal element så gäller det också för de två andra delarna. Detta leder till en alternativ formulering av annulleringslagen:

4. Ekvationen $a + x = b$ har högst en lösning.

Övning 3: Jämför med triangelexemplet ovan. Vi vet då att lag 2, den kommutativa lagen, inte gäller. Undersök om de övriga lagarna gäller. □

En annan viktigt egenskap hos de naturliga talen är att de alla erhålls genom att man succesivt upprepat adderar 1 till det man har. Vi utgår från 0 och adderar 1 gång på gång, $0+1 = 1,\ 1+1 = 2,\ 2 + 1 = 3,\ 3 + 1 = 4$ och så vidare.
Då följer att om c är större än a så når vi c genom uppräkning från a.

Ekvationen $a + x = c$ har alltså lösning om $c \geq a$.
Enligt annulleringslagen har ekvationen högst en lösning. Talet x är alltså entydigt bestämt.
Lösningen till ekvationen $a + x = c$ kallar vi $c - a$.
Annorlunda uttryckt: $c - a$ är det tal b som uppfyller att $a + b = c$. Då följer alltså att $a + (c - a) = c$. Annulleringslagen gör det alltså *möjligt* att definiera subtraktionen $c - a$ om $c \geq a$.

Vi sammanfattar resonemanget ovan i en räkneregel:

5. Om $c \geq a$ så gäller: $b = c - a \Leftrightarrow a + b = c$ (definition av subtraktion)

Ett mer konkret sätt att uttrycka sambandet är: ”3 och 4 är 7-kamrater, därför är $3+4 = 7,\ 4+3 = 7,\ 7 - 4 = 3$, och $7 - 3 = 4$.

Om vi kombinerar räkneregel 5 med kommutativa lagen så ser vi att $(7 - 3) + 3 = 7$, $7 - 3$ är det tal som ger 7 då vi adderar 3. Generellt kan vi säga att $c - a$ är det tal som ger c då vi adderar a, alltså $(c - a) + a = c$.

Det är frestande att motivera regeln $(c-a)+a = c$ med följande kalkyl: $(c-a)+a = c+(a-a) = c+0 = c$. Då använder vi emellertid räkneregler som vi ännu inte har argument för, motiveringen måste vara baserad på subtraktionens definition.

Också associativa lagen kan behöva förklaras något. Addition är ju definierad för *två* tal. Vill vi addera fler tal så måste vi ändå addera två i taget. Det skulle då kunna vara väsentligt i vilken ordning vi utför additionerna. Associativa lagen säger att så inte är fallet.
Det är naturligtvis viktigt att vi är tydliga med vad vi menar, annars kan det bli problem längre fram då subtraktion kommer in i bilden. För att precisera i vilken ordning additionerna skall utföras använder vi parenteser, additionen inom parentes skall utföras först, den har *högre prioritet*. Skrivsättet $(a + b) + c$ innebär således att först skall $a + b$ beräknas. Till denna summa skall sedan adderas c. Skrivsättet $a + (b + c)$ innebär att $b + c$ skall beräknas först, denna summa skall sedan adderas till a. För att förenkla skrivarbetet har man också bestämt att addition och subtraktion har samma prioritet, multiplikation och division har samma prioritet, men högre än additionens. Dessutom har man en vänster – höger prioritet, operationerna utförs i den ordning man möter dem då man läser från vänster till höger. Först utförs alltså alla operationer som står inom parentes, sedan alla multiplikationer och divisioner i ordning från vånster till höger, sist alla additioner och subtraktioner i ordning från vånster till höger. En god regel är att om det finns minsta risk för missuppfattning så skall parenteser infogas.

Övning 4: Vi vet att räknelagarna gäller, de är mer eller mindre självklara. Förklara och motivera dem på olika sätt och på olika förståelsenivåer. $\square$

Vid enbart addition är, som vi konstaterat, parenteserna oviktiga, resultatet är detsamma oavsett additionernas ordning.
Om subtraktion ingår så blir det helt annorlunda. Då kommer teckenregler in, regler som ofta memoreras utan större eftertanke: ”*minus-minus är plus*” som exempel. I själva verket är dessa regler förhållandevis enkla konsekvenser av räknelagarna ovan.

6. Om $b \geq c$ så gäller: $a + (b - c) = (a + b) - c$
7. Om $a \geq (b + c)$ så gäller: $a - (b + c) = (a - b) - c$
8. Om $a \geq b$ och $b \geq c$ så gäller: $a - (b - c) = (a - b) + c$
9. Om $a + c \geq b$ och $b \geq c$ så gäller: $a - (b - c) = (a + c) - b$

(De olika villkoren, som: ”Om $b \geq c$ så $\cdots$” finns med för att säkerställa att subtraktionerna inte kräver negativa tal. Reglerna är, som läsaren säkert vet, giltiga för alla reella tal utan inskränkningar. Vi återkommer till dem längre fram.)

Exempel 1:
Vi undersöker hur regel sju kan härledas från reglerna ett – fem:

För att förstå regeln kan vi först undersöka ett specialfall: vi väljer till exempel $a = 13$, $b = 5$ och $c = 3$. Då är $b + c = 8$ och $a > (b + c)$ vilket är kravet i regel sju, annars leder subtraktionen till ett negativt tal.

Vi sätter sedan in talen dels i likhetens vänsterled, förkortas i fortsättningen V.L., och dels i likhetens högerled, förkortas H.L.
Då får vi $V.L. = a-(b+c) = 13-(5+3) = 13-8 = 5$ och $H.L. = (a-b)-c = (13-5)-3 = 8 - 3 = 5$.
Vi ser att regeln ger korrekt resultat i detta speciella fall. Vi kanske ännu inte förstår *varför* det stämmer.

Nästa steg är att hitta på en räknesaga som speglar likheten $13 - (5 + 3) = (13 - 5) - 3$:
”*Lisa har 13 kronor i sin plånbok. Hon går in i en affär och köper en chokladkaka för 5 kronor och en tablettask för 3 kronor. Hon får då betala 5+3 kronor. Kvar i plånboken har hon* $13 - (5 + 3)$ *kronor. Pelle har också 13 kronor i sin plånbok. Han går in i samma affär och köper en chokladkaka för 5 kronor och betalar den. Kvar i plånboken har han* $13 - 5$ *kronor. Sedan kommer han på att han skall ha en tablettask också. Den kostar 3 kronor och när han betalt den har han* $(13 - 5) - 3$ *kronor kvar i plånboken. Självklart har Lisa och Pelle lika mycket kvar:* $13 - (5 + 3) = (13 - 5) - 3$.”

Efter detta bör läsaren känna sig ganska säker på att regeln är korrekt men fortfarande med en viss skepsis.

Ett tredje steg är att försöka ”lyfta” uträkningarna i första steget till ett allmängiltigt argument och försöka se *varför* vi får samma resultat i de två kalkylerna.

Tänk då på att 13 - 8 = 5 *eftersom* 5+8 = 13. Vi adderar därför 8 till båda sidor:

$V.L. + 8 = (13 - (5 + 3)) + 8 = (13 - 8) + 8 = \{\text{regel } 5\} = 13$. Den inskjutna kommentaren syftar på att den sista likheten motiveras av räkneregel 5.

$H.L. + 8 = ((13-5)-3)+8 = ((13-5)-3)+(3+5) = \{\text{lag } 3\} = (((13-5)-3)+3)+5 = \{\text{regel } 5\} = (13 - 5) + 5 = \{\text{regel } 5\} = 13$

Nu har vi funnit att $V.L. + 8 = H.L. + 8$ och kan slutligen använda annulleringslagen, lag 4, som då ger att $V.L. = H.L.$

Slutligen generaliserar vi de senaste kalkylerna till ett algebraiskt argument för att sambandet alltid gäller. Vi noterar då att 13 var det värde vi gav a och 8 var $b + c$ då b var 5 och c var 3. Vi byter nu helt enkelt tillbaka i de senaste kalkylerna:

$V.L. + (b + c) = (a - (b + c)) + (b + c) = \{\text{regel } 5\} = a$.

$H.L. + (b + c) = ((a - b) - c) + (b + c) = \{\text{lag } 2\} = ((a - b) - c) + (c + b) = \{\text{lag } 3\} = (((a - b) - c) + c) + b = \{\text{regel } 5\} = (a - b) + b = \{\text{regel } 5\} = a$

Vi ser att $V.L. + (b + c) = H.L. + (b + c)$. Annulleringslagen, lag 4, ger då att $V.L. = H.L$ som vi önskade bevisa.

$\square$

Övning 5: Räknereglerna sex, åtta och nio kan bevisas på samma sätt som regel sju bevisades i exemplet ovan. Genomför samma typ av resonemang för minst en av dem, gärna för alla tre det är en bra övning. $\square$

2.6 Räknelagar och räkneregler för multiplikation av naturliga tal

Övning 6: Vilka av räknelagarna gäller för multiplikation av naturliga tal? (Naturligtvis efter att addition, $+$, ersatts av multiplikation, $*$, och viss annan modifiering.
Har reglerna 5 – 9 några motsvarigheter?
Finn en räknelag som handlar om samspelet mellan addition och multiplikation.
Hitta på räknesagor som belyser räknelagarna. $\square$