Facit till extrauppgifterna

1. Ett positivt heltal går jämnt in i det givna talet om och endast om det är på formen

$$2^a \times 3^b \times 7^c \times 11^d$$

där

$$\begin{aligned} a &\text{ är antingen } 0,1,2,3,4,5,6 \text{ eller } 7 \\ b &\text{ är antingen } 0,1,2,3,4 \text{ eller } 5 \\ c &\text{ är antingen } 0,1 \text{ eller } 2 \\ d &\text{ är antingen } 0 \text{ eller } 1. \end{aligned}$$

Man har alltså

$$\begin{gathered} 8 \text{ möjligheter för } a, \\ 6 \text{ möjligheter för } b, \\ 3 \text{ möjligheter för } c, \\ 2 \text{ möjligheter för } d. \end{gathered}$$

Enligt MP, antalet vi letar efter är därmed

$$8 \times 6 \times 3 \times 2 = 288.$$

Dvs, det finns 288 olika positiva heltal som går jämnt in i det givna talet.

2. 1:a Lösning :

Välj tre böcker. Sannolikheten att den 2:a är i samma språk som den 1:a är $3/11$ ty man har 11 böcker kvar varav 3 är i det språket. Därefter, sannolikheten att den 3:e boken är i samma språk som de två första är, pss, $2/10 = 1/5$.

Enligt (en utvidgning av) MP, sannolikheten att alla tre böckerna är i samma språk är därmed

$$\frac{3}{11} \times \frac{1}{5} = \frac{3}{55} \approx 0.055$$

2:a Lösning :

Vi beräknar

$A :=$ antalet sätt att välja tre böcker i samma språk,
$B :=$ totala antalet sätt att välja 3 valfria böcker.

Å ena sidan $A = 12$ för att välja tre böcker i samma språk är ekvivalent med att välja en enda valfri bok (tänk dig att du slänger den valda boken och tar de andra tre i samma språk).

Å andra sidan $B = \binom{12}{3} = \frac{12\times 11\times 10}{2\times 3}$.

Den efterlängtade sannolikheten är då $\frac{A}{B} =$ som förut, efter lite bråkräkning.

3. 1:a Lösning :

Resonemanget är som i uppgift **2** så jag kommer att bli något mer kortfattad.

Sannolikheten att 2:a kortet i samma färg som 1:a $= 12/51$.
Sannolikheten att 3:e kortet i samma färg som de två första $= 11/50$.
Sannolikheten att 4:e kortet i samma färg som de tre första $= 10/49$.
Sannolikheten att 5:e kortet i samma färg som de fyra första $= 9/48$.

Därmed ges sannolikheten att alla fem korten är i samma färg av

$$\frac{12}{51} \times \frac{11}{50} \times \frac{10}{49} \times \frac{9}{48} = \frac{33}{16660} \approx 0.00198$$

2:a Lösning :

Beräkna

$A :=$ antalet giv där alla fem korten är i samma färg,
$B :=$ totala antalet möjliga giv.

Å ena sidan, $A = 4 \times \binom{13}{5}$ ty vi har 4 val för färgen och då ska vi välja 5 kort av 13 i den färgen.

Å andra sidan, $B = \binom{52}{5}$ ty vi väljer 5 valfria kort av 52.

Den efterlängtade sannolikheten är då $\frac{A}{B} =$ som förut, efter lite bråkräkning.

4. Sannolikheten att förrätten finns bland 1 och 2 är $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.
Sannolikheten att huvudrätten finns bland A,B och C är $\frac{3}{8}$.
Sannolikheten att efterrätten finns bland α, β och γ är $\frac{3}{7}$.

Dessa tre händelser är oberoende av varandra ty man kombinerar sina rätter helt på måfå. Sannolikheten att alla tre inträffar är därmed

$$\frac{1}{3} \times \frac{3}{8} \times \frac{3}{7} = \frac{3}{56} \approx 0.0536$$

5 (i) 1:a Lösning :

Tre av 31 lag ska lottas tillsammans med Sverige. Chansen att England finns bland dessa är därmed 3/31.

2:a Lösning :

Beräkna

$A :=$ antalet sätt att välja 3 av de 31 lagen utom Sverige s.a. England finns bland dessa tre,
$B :=$ totala antalet sätt att välja 3 av de 31 lagen utom Sverige.

Å ena sidan, $A = \binom{30}{2}$ ty England måste väljas och vi har kvar 2 lag att välja fritt ut av 30 st.
Å andra sidan, $B = \binom{31}{3}$.
Svaret är $\frac{A}{B} = \frac{3}{31}$, efter lite bråkräkning.

(ii), (iii) Utelämnas. Fråga mig om du vill diskutera dessa uppgifter.

6. Obs! Det är underförstått i denna uppgift att de 13 testade patienterna har inte haft någon kontakt med varandra och kunde därmed inte ha smittat varandra. Detta medför att resultaten av de individuella testen är oberoende av varandra s.a. vi kan tillämpa MP för att beräkna sannolikheter.

(i) $(0.4)^{13}$.

(ii) Sannolikheten att en given person testar negativt och att alla andra testar positiva är

$$0.6 \times (0.4)^{12}.$$

Men det finns 13 exklusiva sätt att välja den osmittade personen. Den totala sannolikheten för exakt ett negativt resultat är alltså

$$13 \times 0.6 \times (0.4)^{12}.$$

(iii) Sannolikheten att två givna personer testar negativa och att alla andra testar positiva är

$$(0.6)^2 \times (0.4)^{11}.$$

Men det finns $\binom{13}{2}$ exklusiva sätt att välja de två osmittade personerna. Den totala sannolikheten för exakt två negativa resultat är alltså

$$\binom{13}{2} \times (0.6)^2 \times (0.4)^{11}.$$

(iv) Högst två negativa resultat innebär antingen inga, ett eller två negativa resultat. Så det är bara att lägga ihop sannolikheterna från **(i)**, **(ii)** och **(iii)**. Svaret blir

$$(0.4)^{13} + 13 \times 0.6 \times (0.4)^{12} + \binom{13}{2} \times (0.6)^2 \times (0.4)^{11}.$$

7 (i) Kalla hörnen för A,B och C i valfri ordning. Då när det gäller färgläggningen så finns det, i tur och ordning,

- 5 möjligheter för hörn A,
- 4 möjligheter för hörn B, ty den kan inte ha samma färg som A,

- 3 möjligheter för C, ty den kan inte ha samma färg som A eller B, som redan har olika färger.

Svaret, enligt MP, blir $5 \times 4 \times 3 = 60$.

(ii) Kalla hörnen för A,B,C och D, i medurs riktning säg och s.a. det är sidan AD som fattas från kvadraten. Då när det gäller färgläggningen så finns det, i tur och ordning,

- 5 möjligheter för A,
- 4 möjligheter för B, ty den kan inte ha samma färg som A,
- 4 möjligheter för C, ty den kan inte ha samma färg som B,
- 4 möjligheter för D, ty den kan inte ha samma färg som C.

Svaret, enligt MP, blir $5 \times 4 \times 4 \times 4 = 320$.

8. Chansen att ha rätt (resp. fel) på varje enskild fråga är 1/3 (resp. 2/3). Man blir underkänd om man får antingen 0,1 eller 2 rätt. Resonemanget är nu identiskt med det i uppgift **6** så jag lämnar ut detaljerna och nöjer mig med att skriva svaret, som är

$$\left(\frac{2}{3}\right)^8 + 8 \times \left(\frac{1}{3}\right) \times \left(\frac{2}{3}\right)^7 + \binom{8}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^6.$$

9. Resonemanget liknar det i tidigare uppgifter. Svaret är

$$\frac{9999 \times 9998 \times 9997 \times \cdots \times 9953}{(10,000)^{47}}.$$