TMA 055 : Diskret Matematik

Inlämningsuppgift 1

Följande allmäna regler gäller för alla inlämningsuppgifterna (se också Kurs PM:et) :

1. Motivera (bevisa) alla svar.
2. Uppge vilka du samarbetet med.
3. Spara uppgifterna (med kommentarer) när du får tillbaka dem.

Uppvärmning

Se uppvärmningsövningarna från i fjol. Dessutom följande uppgifter

1. Låt a, b, c, d, n vara heltal. Antag att $a \equiv c \pmod{n}$ och att $b \equiv d \pmod{n}$. Bevisa att

$$a + c \equiv b + d \pmod{n} \quad \text{och} \quad ac \equiv bd \pmod{n}.$$

2. Låt $d = \mathrm{SGD}(294, 108)$.

(i) Använd Euclides algoritm för att beräkna d.
(ii) Ange heltal x och y så att $d = 294x + 108y$.
(Ledning : Gå bakåt igenom Euclides algoritm).

3. Utan att kika i någon bok, och utan att använda Aritmetikens Fundamentalsats, bevisa följande saker

(i) Det finns oändligt många primtal.
(Ledning : Antag motsatsen och betrakta talet $P + 1$, där P är produkten av alla primtal.)

(ii) $\sqrt{2}$ är ett irrationellt tal.

Att lämna in torsdag den 19 september

1. Ange exempel av relationer på $\mathbf{N}$ som är

(i) reflexiv och symmetrisk men inte transitiv,
(ii) reflexiv och transitiv men inte symmetrisk,
(iii) symmetrisk och transitiv men inte reflexiv.

OBS! För högsta poäng ska du ge relationer som kan beskrivas 'med ord' så enkelt som möjligt.

2. Låt M_n vara mängden av alla binära n-bitars ord. Låt $\mathcal{R}$ vara följande relation på M_n :

för två ord $x = x_1 x_2 \cdots x_n$ och $y = y_1 y_2 \cdots y_n$, säg $x\mathcal{R}y$ om det finns en permutation av de n bitarna i x som transformerar den till y.

Visa att $\mathcal{R}$ är en ekvivalensrelation. Beskriv ekvivalensklasserna. Bestäm också hur stora de olika ekvivalensklasserna är.

3. Låt $\mathbf{Q}^\times$ beteckna mängden av alla rationella tal utom noll. Betrakta följande relation $\mathcal{R}$ på $\mathbf{Q}^\times$:

säg $a\mathcal{R}b$ om det finns rationella tal x, y så att

$$\frac{a}{b} = x^2 + y^2.$$

Visa att $\mathcal{R}$ är en ekvivalensrelation.
(OBS! Du får en bra bonus om du kan reda ut ekvivalensklasserna.)

4. Om x, y är positiva heltal, låt oss beteckna

$$x \wedge y := \mathrm{SGD}(x, y), \quad x \vee y := \mathrm{MGM}(x, y).$$

Låt nu a, b, c vara tre som helst positiva heltal. Visa att

$$(i) \ \ a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c),$$
$$(ii) \ \ a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c).$$

(Ledning : Använd Aritmetikens Fundamentalsats).

5. Utan att använda en miniräknare eller en dator, visa att talet $(17^{47} + 2^{12})^{14} - 4$ är delbart med 13.

6. Det finns en berömd sats av den franska matematikern Lagrange som säger att varje naturligt tal kan skrivas som summan av kvadraterna av fyra eller färre heltal.

Bevisa att, å andra sidan, det finns oändligt många naturliga tal som inte kan skrivas som summan av tre eller färre heltalskvadrater.

(Ledning : tänk modulo 8).

7. Bevisa att, för varje naturligt tal n,

$$n = \sum_{d|n} \phi(d).$$

(Ledning : Bevisa resultatet först när n är en primpotens).

Bonusproblem (inget samarbete)

Jag tror att ni har redan tillräckligt mycket att göra !

Ytterligare övningar

Se inlämningsuppgifterna från föregående år. Det finns länkar från kurshemsidan.