Sats 2.5. *Låt D vara en öppen, bågvis sammanhängande delmängd till $\mathbf{R}^n$ och $f \in C^1(D)$. Om $\nabla f \equiv \vec{0}$ överallt i D, då är f en konstant funktion i D.*

Bevis : Låt a, b vara två godtyckliga punkter i D. Vi måste visa att $f(a) = f(b)$. Låt $\phi : [0,1] \to D$ vara en kontinuerlig funktion så att $f(0) = a$ och $f(1) = b$. Sätt

$$s := \sup_{t \in [0,1]} \{t : f(a) = f(\phi(t))\}. \tag{1}$$

Ty f är kontinuerlig, $f(\phi(s)) = f(a)$ så räcker det att bevisa att $s = 1$.

Antag $s < 1$. Ty D är öppen, finns det $\epsilon > 0$ så att $B(\phi(s), \epsilon) \subseteq D$. Ty ϕ är kontinuerlig, finns det $\delta > 0$ så att $\phi([s, s+\delta)) \subseteq B(a, \epsilon)$. Alltså kan man nå från $\phi(s)$ varje punkt $\phi(s + \delta^*)$, för $\delta^* < \delta$, längs en båge som ligger helt i D och består av ändliga många steg, var och en parallell med en av de koordinat axlerna. Eftersom $\nabla f \equiv 0$, följer det att $f(\phi(s + \delta^*)) = f(\phi(s))$ för alla $\delta^* < \delta$. Men detta säger mot definitionen till s. q.e.d.

Sats 3.3. *Låt $F(x, y)$ vara en C^1-funktion och (a, b) en punkt på nivåkurvan $F(x, y) = C$. Om*

$$\frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0 \tag{2}$$

så finns det en öppen omgivning U av (a, b) sådan att restriktionen av nivåkurvan till U implicit definierar en C^1-funktion $y = f(x)$.

Bevis : Vi använder den Invers Funktion satsen. Betrakta funktionen $G : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ där

$$G(x, y) := (x, F(x, y)).$$

G är C^1 eftersom F är. Vi har

$$\det(\mathrm{Jac}[G]) = \frac{\partial G_1}{\partial x}\frac{\partial G_2}{\partial y} - \frac{\partial G_2}{\partial x}\frac{\partial G_1}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial y}.$$

Alltså, determinanten är skild från noll i punkten (a, b). Nu följer det från den Invers Funktion satsen att det finns en omgivnign U av (a, b) där G har en C^1 invers, som vi nämner H. Det vill säga, $G(U)$ är en öppen mängd, $H : G(U) \to \mathbf{R}^2$ är C^1 och

$$H(x, F(x, y)) = (x, y) \quad \text{för alla } (x, y) \in U. \tag{3}$$

Om vi inskränkar uppmärksamheten till nivåkurvan (2), då säger (3) att

$$H(x, C) = (x, y) \tag{4}$$

för alla x i en omgivning av a i $\mathbf{R}$. Dvs, (4) definierar en C^1-funktion $y = f(x)$ längs nivåkurvan (2) i närheten av (a, b). q.e.d.