Sammandrag av föreläsning 9
Tisdag 30/11/99

Tensorer

Alla vektorrum är reella.

DEFINITION 1 : Låt V vara ett vektorrum. Den *dual* till V är mängden av alla linjära avbildningar från V till $\mathbf{R}$.

Den dual till V betecknas oftast som V^* eller $\mathrm{Hom}(V, \mathbf{R})$.

Det är klart att V^* är också ett vektorrum, om vi definierar addition och skalär multiplikation av avbildningar genom

$$(\phi + \psi)(v) := \phi(v) + \psi(v) \qquad (\alpha\phi)(v) := \alpha\phi(v). \tag{1}$$

Den fondamentala satsen om dual vektorrum är följande :

Sats. *(i) Låt V vara ett ändlig-dimensionellt vektorrum. Då är V^* också ändlig-dimensionellt och $dim(V) = dim(V^*)$.*

(ii) Om $\{e_1, ..., e_n\}$ är en bas till V, då är $\{\omega^1, ..., \omega^n\}$ en bas till V^*, där den avbildningen ω^i definieras genom

$$\omega^i(e_j) = \delta^i_j \ \text{ där } \ \delta^i_j = \begin{cases} 1, & \text{om } i = j. \\ 0, & \text{om } i \neq j. \end{cases} \tag{2}$$

ANMÄRKNING : Basen $\{\omega^i\}$ sägs vara *dual* till basen $\{e_i\}$. Funktionen δ^i_j kallas för *Kroneckers δ-symbol.*

BEVIS : Se, t. ex. [1], kap. 4.

Aside : Einsteins summering notation för tensorer

Följande är inte så precis, men det kommer att förklara sig efter diskussionen nere. Det finns tre regler i Einsteins notation :

(i) Summera över repeterade indexer.
(ii) När en index är repeterad två gånger, då är den en övre index en gång och en nedre index den andra gången.
(iii) Ingen index repeteras fler än två gånger i ett uttryck.

Exempel : Låt $v \in V$, ett vektorrum med bas $\{e_1, ..., e_n\}$. Vi skriver $v = \alpha^i e_i$ för att indikera att talet α^i är den komponenten av v längs e_i. Om $\phi \in V^*$, då skriver vi $\phi = \alpha_i \omega^i$ för att indikera att $\phi(e_j) = \alpha_j$.

End of aside

Definition : Låt V, W vara ändlig-dimensionella vektorrum med baser $\{e_1, ..., e_n\}$ och $\{f_1, ..., f_m\}$ resp. Den *tensor produkten* $V \otimes W$ av V och W är det vektorrum som spänns upp av alla symboler $e_i \otimes f_j$ så att om $v \in V$ och $w \in W$ då

$$v = \alpha^i e_i,\ w = \beta^j f_j \Rightarrow v \otimes w \ \stackrel{\text{def}}{=} \alpha^i \beta^j\ e_i \otimes f_j. \qquad (3)$$

Notera att $\dim(V \otimes W) = \dim(V) \times \dim(W)$.

Definition 3 : Låt $r, s \geq 0$ vara heltal. Låt V vara ett ändlig-dimensionellt vektorrum. En *tensor av rang* (r, s) *med avseende på* V är ett element av

$$\underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{r \text{ gånger}} \bigotimes \underbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{s \text{ gånger}}$$

Om $\{e_1, ..., e_n\}$ är en bas till V med motsvarande dual bas $\{\omega^1, ..., \omega^n\}$ till V^*, då kan en rang (r, s)-tensor T skrivas som

$$T = T^{\alpha_1 \cdots \alpha_r}_{\beta_1 \cdots \beta_s}\ e_{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes e_{\alpha_r} \otimes \omega^{\beta_1} \otimes \cdots \otimes \omega^{\beta_s}. \qquad (4)$$

Om dessa baser är kännda och fixerada, då skriver man ofta $T = T^{\alpha_1 \cdots \alpha_r}_{\beta_1 \cdots \beta_s}$.

Anmärkning : En tensor av rang $(0, 0)$ kallas för en *skalär*. En tensor av rang $(1, 0)$ kallas för en *vektor*. En tensor av rang (o, s) kallas för en *s-form*.

Ett n-dimensionellt *mångfält* är ett topologist rum som ser 'lokalt' ut som $\mathbf{R}^n$ (för en mer precis definition, se t.ex. [2], kap. 5). Det enklaskte exemplet är alltså $\mathbf{R}^n$ själv. Till varje punkt p på ett n-mångfält M anslutas ett n-dimensionellt vektorrum som kallas för det *tangent rummet* till M i p, och betecknas T_pM. Om vi väljer, för varje punkt p i ett öppet delmängd $\Omega \subseteq M$, en rang (r,s)-tensor T med avseende på T_pM, då får vi ett så kallad rang (r,s)-*tensorfält* $\mathbf{T}$ på Ω. Man kan definiera precis vad det betyder för ett sådant fält att vara C^1, C^2, C^∞ mm.

Den viktigaste typen av tensorfält på ett mångfält är en så kallad *metrik*. Denna är ett rang $(0,2)$-fält som betecknas normalt med $g = g_{ij}$ och som beskriver hur man mäter *avstånd/längd* på mångfältet genom formulen

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j. \tag{5}$$

EXEMPEL (A) I $\mathbf{R}^n$ utrustad med normaliserade rättvinkliga koordinator är $g_{ij} = I_n$ (enhetsmatris) och

$$ds^2 = (dx^1)^2 + \cdots + (dx^n)^2 \quad \text{(Pythagoras)}. \tag{6}$$

(B) Den enhetssfären S^2 i rummet är ett 2-dimensionellt mångfält utrustad med sfäriska koordinator ϕ, θ. Då är metriken $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2\phi \end{pmatrix}$ och

$$ds^2 = d\phi^2 + \sin^2\phi \, d\theta^2. \tag{7}$$

(C) I speciell relativitet, betraktar man ett 4-dimensionellt mångfält utrustad med lokala koordinator t, x, y, z och metriken

$$g = \begin{pmatrix} -c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{8}$$

så att

$$ds^2 = -c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2. \tag{9}$$

Detta är ett exempel av ett *Lorentzian* mångfält.

Ett annat viktigt tensorfält är den så kallade *Riemann curvature tensor* $\boldsymbol{R} = R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}$ som är 'closely related to' den metrik tensoren (den innehåller partiella derivator av g, men den precisa definitionen är komplicerad).

DEFINITION : Om T är en rang (r,s)-tensor, då får vi en ny rang $(r-1, s-1)$-tensor genom att summera över ett par indexer i T. Denna operation kallas för *kontraktion* och kan betecknas symboliskt med

$$T^{\alpha_1\cdots\alpha_r}_{\beta_1\cdots\beta_s} \to T^{\alpha_1\cdots\gamma\cdots\alpha_r}_{\beta_1\cdots\gamma\cdots\beta_s}. \tag{10}$$

EXEMPEL : Den så kallade *Ricci curvature tensoren* $R_{\alpha\beta}$ är en kontraktion av den Riemann curvature tensoren, nämligen $R_{\alpha\beta} = R^{\gamma}_{\alpha\gamma\beta}$. En vidare kontraktion ger ett skalär fält, den så kallade *skalära curvature* $R = R^{\alpha}_{\alpha}$.

ANMÄRKNING : I $\mathbf{R}^n$, det Riemann curvature fältet är identiskt noll (man säger att $\mathbf{R}^n$ är *platt*). Det Lorentzian mångfältet i exempel (C) ovan är också platt - detsamma gäller varje mångfält där den metrik tensorfältet är konstant. Å andra sidan, på sfären S^2 har den skälara curvature det konstanta värdet -1. Man säger att sfären har *negativ curvature.*

Allmän relativitet kan sammanfattas med ekvationen

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R = T_{\alpha\beta}, \tag{11}$$

som kallas för *Einsteins ekvation.* Här är $T_{\alpha\beta}$ en rang $(0,2)$-tensor som kallas för den *mass-energi tensoren* och som beskriver distributionen av mass-energi i universum (det finns någonting liknande i elasticitet (mycket vanlig klassisk fysik !), den så kallade *stress-energi tensoren*).

Alltså borde (11) betraktas som en partiell diffekvation för metriken g, eftersom de komponenterna av den Riemann curvature $R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}$ innehåller partiella derivator av de komponenterna av g.

Idéen bakom allmän relativitet är att förklara gravitation genom att säga att

(i) universum är ett 4-dimensionellt mångfält (som kallas för *spacetime*).
(ii) den existens av mass-energi i detta mångfält resulterar i curvature, enligt (11).
(iii) ljus och material följer kortaste bågar (teknisk term : *geodesics*) i detta buktiga mångfält. Notera att i ett butkigt mångfält, en geodesic är inte

normalt en rät linje (t.ex. på sfären, de geodesics är cirkelbågar).

Maxwells ekvationer

Vi har redan sett (föreläsning 7) en av Maxwells ekvationer (i vakuum), nämligen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\boldsymbol{E}} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \tag{12}$$

Som vi har redan diskuterat, illustrerar (12) hur den divergensen av ett vektorfält mäter den 'lokala produktionen' av den material som resulterar i fältet. Alltså, den analogen till (12) för det magnetiska fältet är

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\boldsymbol{B}} = 0. \tag{13}$$

Ekv. (13) är ekvivalent med den fysiska förutsättningen att det finns inga magnetiska *monopolar*, dvs att för varje positiv (norr) pol finns det en motsvarande negativ (söder) pol av samma kraft. Hittills, har inga magnetiska monopolar observerats.

För att skaffa de två kvarstående Maxwells ekvationerna, måste vi diskutera några fysiska lag - Ampères lag, Faradays lag och Laddning Konservation.

Ampères lag

Det observerades under 1700-talet att elektriska strömningar producerar magnetiska fält. Biot och Savart påstod att om en strömning I flöder i en ledare, då bidragar varje riktad infinitesimal element $\vec{dl}$ av ledaren ett magnetiskt fält $d\vec{\boldsymbol{B}}$ som i en godtycklig punkt P ges av

$$d\vec{\boldsymbol{B}} = \mu_0 I \frac{\vec{dl} \times \hat{r}}{4\pi r^2} \qquad \text{(Biot-Savart lag)} \tag{14}$$

där $\vec{r}$ är vektoren från dl till P. Experimenter verifierade laget om den fysiska konstanten μ_0 har värdet $4\pi \times 10^{-7}$ i SI enheter.

Ampères lag följer från Biot-Savart och säger att, om γ är en slutan kurva som begränsar den ytan S då är

$$\oint_\gamma \vec{\boldsymbol{B}} \cdot d\vec{\boldsymbol{r}} = \mu_0 \int\int_S \vec{\boldsymbol{J}} \cdot \hat{n}\, dS, \tag{15}$$

där γ är orienterad som i formuleringen av Stokes' sats och $\vec{\boldsymbol{J}}$ är den lokala *strömnings densiteten.* Alltså, säger laget att integralen av fältet kring ytan är lika med den totala strömningen som flöder ut genom ytan. Men Stokes' sats säger också att

$$\oint_\gamma \vec{\boldsymbol{B}} \cdot d\vec{\boldsymbol{r}} = \int\int_S \left(\vec{\nabla} \times \vec{\boldsymbol{B}}\right) \cdot \hat{n}\, dS. \tag{16}$$

Då antyder (15) och (16) att

$$\vec{\nabla} \times \vec{\boldsymbol{B}} = \mu_0 \vec{\boldsymbol{J}}. \tag{17}$$

Faradays lag

Under 1800-talet observerade Faraday att om en magnet rörs mot en cirkulär ledare, då flöder en strömning i ledaren. Dessutom, det magnetiska fältet som produceras av denna strömning försöker repellera magneten. Eftersom strömningen orsakas av och är proportionell till en potential differens kring ledaren (Ohms lag)[1] γ då ledar Faradays observationer till följande lag :

Om den slutna kurvan γ begränsar ytan S, då är

$$\oint_\gamma \vec{\boldsymbol{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{r}} = -\frac{\partial}{\partial t} \int\int_S \vec{\boldsymbol{B}} \cdot \hat{n}\, dS \quad \text{(Faradays lag)}. \tag{18}$$

Men Stokes' sats säger att

$$\oint_\gamma \vec{\boldsymbol{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{r}} = \int\int_S \left(\vec{\nabla} \times \vec{\boldsymbol{E}}\right) \cdot \hat{n}\, dS. \tag{19}$$

Alltså, antyder (18) och (19) att

$$\vec{\nabla} \times \vec{\boldsymbol{E}} = -\frac{\partial \vec{\boldsymbol{B}}}{\partial t}. \tag{20}$$

Laddning konservation : kontinuitetsekvation

Det finns många så kallade 'konservations lag' i fysik. Det 'laget av konservation av elektrisk laddning' säger att laddning kan varken skapas eller förstöras, men bara rör sig omkring. Betrakta nu ett slutet område V, begränsad av ytan S, där det finns elektriska strömningar. Kvantiteten

[1] Här är jag lite imprecis. Det är mer korrekt att säga att i närvaro av varierande magnetiska fält är det elektriska fältet inte konservativt eftersom $\oint_\gamma \vec{\boldsymbol{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{r}} \neq 0$ i allmänhet för slutna kurvor. I denna situation generaliserar vi Ohms lag $I \propto V$ till $I \propto \oint_\gamma \vec{\boldsymbol{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{r}}$.

$\int\int_S \vec{J} \cdot \hat{n}\, dS$ mäter 'the rate at which' laddning flöder ut av V. Eftersom ingen laddning skapas eller förstöras i V enligt det konservation laget, då måste vi ha att

$$\int\int_S \vec{J} \cdot \hat{n}\, dS = -\frac{\partial}{\partial t}(\text{total laddning i } V) = -\frac{\partial}{\partial t}\int\int\int_V \rho\, dV. \tag{21}$$

Men Gauss' divergens sats säger vidare att

$$\int\int_S \vec{J} \cdot \hat{n}\, dS = \int\int\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{J}\, dV. \tag{22}$$

Alltså, antyder (21) och (22) att

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \text{(Kontinuitetsekvation).} \tag{23}$$

Nu kommer vi äntligen till Maxwells stora insikt. Han observerade att ekv. (12), (13), (17), (20) och (23) var inte konsistenta (se PB, s.354-5) men att detta problem kunde korrigeras om vi ersätter (17) med den nya ekvationen

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \vec{J}. \tag{24}$$

Ekv. (24) har en klar fysisk tolkning som en motsats till Faradays lag, dvs att varierande elektriska fält producerar magnetiska fält. Det var Hertz som i 1887 (många år efter Maxwell skrev ner sina lag) gjorde den första experiment som bekräftade Maxwells förutsägelse. Ekv. (24), tillsammans med (12), (13) och (20) är Maxwells lag. Här samlar vi ihop alla fyra lag :

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0}. \\
\vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0. \\
\vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \\
\vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \vec{J}.
\end{aligned}$$

Den vitkigaste konsekvensen av Maxwells teori är att den föutsäger existensen av så kallade elektromagnetiska vågar som sprider (i vakuum) med en universellt konstant fart. För att visa detta, låt oss betrakta den enklaste situationen, där det finns inga laddningar och strömningar (i det delområdet till rymden där vi befinner oss). Nu blir Maxwells ekvationer

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\boldsymbol{E}} = 0. \tag{25}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\boldsymbol{B}} = 0. \tag{26}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\boldsymbol{E}} = -\frac{\partial \vec{\boldsymbol{B}}}{\partial t}. \tag{27}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\boldsymbol{B}} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{\boldsymbol{E}}}{\partial t}. \tag{28}$$

Tillämpa operatoren 'curl' till båda sidor av (27) och antag att alla fält är C^2. Då har vi att

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{\boldsymbol{E}} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{\nabla} \times \vec{\boldsymbol{B}} \right). \tag{29}$$

Från (25), (28) och (75) i föreläsning 8 kan vi skriva om (29) i formen

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \vec{\boldsymbol{E}} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{\boldsymbol{E}}}{\partial t^2} \quad \text{där } c = (\mu_0 \epsilon_0)^{-1/2}. \tag{30}$$

Denna är den 3-dimensionella våg ekvationen vars lösningar är vågar som sprider med fart c (för att se detta i en dimension i stället för tre, gå till PB, s. 77). I SI enheter är

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ och } \epsilon_0 \approx 8.854 \times 10^{-12} \Rightarrow c \approx 2.998 \times 10^8 \, ms^{-1}.$$

Flera experimenter mot slutet av 1800-talet mätte ljusets fart och alla fick exakt samma värde 'within experimental error'. Alltså tillämpade alla förnuftiga fysiker den 'Ockhams rakhjuvel principen' och drog slutsatsen att ljus består av elektromagnetiska vågar. Men nu antydde Maxwells teori att ljusets fart (i vakuum) var en universell konstant. Detta ledade omedelbart till konsekvenser som direkt kränkade (violated) vanlig Newtonian fysik. En lösning till dessa problem kom bara i 1905 med den nya teorin av Speciell Relativitet.

Referenser

[1] I.N. Herstein, Topics in Algebra, Wiley.
[2] M. Spivak, Calculus on Manifolds, Benjamin/Cummings (1965).

Den bok som används I GUs differentiellgeometri kurs är Do Carmo, Differential geometry of curves and surfaces. Denna bok koncentrerar speciellt på 1- och 2-dimensionella mångfält. En annan bok på 'undergraduate' nivå (som har ett bra förord) är J.A. Thorpe, Elementary topics in differential geometry (UTM series), Springer-Verlag. Den bibeln för diff. geom., som är en ganska skrämmande 5-volym verk, är Spivaks 'A comprehensive introduction to differential geometry'.

För allmän relativitet, den bibeln är 'Gravitation', av Meisner, Thorne och Wheeler. Denna bok borde inte läsas innan du har sett diff. geom. i en matte kurs !