MAN 030 : Hösten 99 (Del 2)

Inlämningsuppgift 1

(att lämnas in senast 9/12/99)

F.1 För var och en av följande integraler, skissera integrations området och beräkna integralen :

$$\textbf{(a)} \int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \frac{1}{\sqrt{1+y^3}}\, dy\, dx \quad \textbf{(b)} \int_1^2 \int_{\frac{x}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}x} (x^2+y^2)^{3/2}\, dy\, dx.$$

(En *ledning* till del **(b)** kan ges om du behöver den. Men försöka att lösa den dig själv först.)

F.2 Beräkna

$$\textbf{(a)} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\cos x} x^3 y\, dy\, dx \quad \textbf{(b)} \int_{-1/\sqrt{2}}^0 \int_{-x}^{\sqrt{1-x^2}} x^3 y\, dy\, dx.$$

F.3 Låt R vara triangeln begränsad av $y = a$ $(a > 0)$, $y = x/2$ och $y = x$. Beräkna $\int\int_R y^2 e^{y^2}\, dx\, dy$.

F.4 **(a)** Skissera områden som begränsas av γ_1 resp. γ_2 där

$$\gamma_1 = \{(r,\theta) : r = 1 + \sin\theta\} \quad \gamma_2 = \{(r,\theta) : r = |\sin 2\theta|\}.$$

Din ritning borde förklara varför det första området kallas för en *cardioid* och den andra för en *ros med fyra lövar.*
(b) Beräkna areorna av de två områden.

F.5 Ange volymer av följande område

(a) över paraboloiden $z = x^2 + y^2$ och under planet $z = x + y$.
(b) mellan sadeln $z = xy$ och konen $z^2 = x^2 + y^2$ och över den första kvarten

av skivan $x^2 + y^2 \leq 1$.

F.6 Temperaturen i en punkt (x, y, z), $y > 0$, är $e^{-x}/\sqrt{y}$. Beräkna den medel temperaturen i området begränsas av cylindern $y = x^2$, och de två planen $y = 1$ och $z = 2y$.

(Obs! $T_{\text{av}} = \frac{1}{\text{vol}(R)} \int_R T \, dV$.)

F.7 Lös övning **8.21**.

***F.8** Låt den homogena kroppen K av konstant densitet ρ ligga i området Ω. För en linje L i rummet, kroppens *tröghetsmoment* runt P definieras som

$$I_L \stackrel{\text{def}}{=} \int\int\int_\Omega \rho \, r^2 \, dV. \tag{1}$$

Beräkna I_L i följande situationer :

(a) K är en cylindrisk skal (shell) av mass M med inre radie a, yttre radie b och längd h. L är rättvinklig med cylinders axeln och går genom dess masscentrum.
(b) K är en sfärisk skal av mass M med inre radie a och yttre radie b. L är en diameter.

(Svar : **(a)** $M(a^2 + b^2 + \frac{h^2}{3})/4$, **(b)** $2M(b^5 - a^5)/[5(b^3 - a^3)]$).

F.9 (a) För vilka α konvergerar integralen $\int_R y^\alpha e^{-x^2} \, dx dy$ där R är området i det xy-planet mellan den positiva x-axeln och linjen $y = x$.
(b) Beräkna integralen för $\alpha = 1$.

F. 10 Bevisa den Cauchy-Schwarz olikheten för integraler

$$\left(\int_a^b f(x) g(x) \, dx \right)^2 \leq \left(\int_a^b f(x)^2 \, dx \right) \left(\int_a^b g(x)^2 \, dx \right), \tag{2}$$

genom att betrakta den dubbelintegralen $\int\int_{\Delta} [f(x)g(y) - f(y)g(x)]^2 \ dx\, dy$, där $\Delta = [a,b] \times [a,b]$.

***F. 11** Var skulle du placera två punkter i den enhetskvadraten Δ för att minimisera den medel avståndet från en punkt i Δ till den närmaste av dem.

F. 12 Beräkna kurvintegralerna $\int_{\gamma} \vec{\boldsymbol{F}} \cdot d\vec{\boldsymbol{r}}$ där

(a) $\vec{\boldsymbol{F}} = (e^x y, x \sin \pi y)$, $\gamma =$ rät linje från $(0,0)$ till $(1,1)$.
(b) $\vec{\boldsymbol{F}} = (\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})$, $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ där $\gamma_1 = \{(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) : 0 \leq t \leq \frac{1}{4}\}$ och $\gamma_2 = \{(t,1) : 0 \leq t \leq 1\}$.
(c) $\vec{\boldsymbol{F}} = (e^x \sin y, e^{2x} \cos y)$, $\gamma =$ rektangeln med vertices $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,\pi/2)$, $(1,\pi/2)$ med en positiv orientering.
(d) $\vec{\boldsymbol{F}} = (x^2 - y^3, y^2 + x^3)$, $\gamma =$ första kvart av enhetscirkeln, moturs.
(e) $\vec{\boldsymbol{F}} = (\frac{-y}{(x^2+y^2)^3}, \frac{x}{(x^2+y^2)^3})$, $\gamma =$ enhetscirkeln.
(f) $\vec{\boldsymbol{F}}$ som i del **(e)**, $\gamma =$ cirkeln av radie 1 med centrum i $(2,2)$.
(g) $\vec{\boldsymbol{F}} = (e^x y, e^x + 2y)$, $\gamma =$ kurvstycken $x = y^3$ från $(0,0)$ till $(1,1)$.

F.13 Beräkna arean av området begränsad av kurvan $x = t(1-t^2)$, $y = t^2(1-t^3)$ för $0 \leq t \leq 1$.

***F.14** Bevisa följande imponerande sats (c.f. *Cauchy's integral formul* i Komplex Analys) :

SATS : Låt $f(x,y)$ vara harmonisk. Låt Q vara en godtycklig punkt och låt $C(Q,r)$ beteckna cirkeln av radie r med centrum i Q. Då är $f(Q) = \frac{1}{2\pi r} \oint_{C(Q,r)} f \, ds$.

(Dvs, värdet av en harmonisk funktion i en punkt Q är lika med medeln av dess värde på varje cirkel med centrum i Q).

Ledning: (1) Beteckna integralen med $I(r)$ och visa att $I(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(r,\theta) d\theta$ för ett lämplig val av polära koordinator.

(2) Visa att $\frac{\partial f}{\partial r} = \vec{\nabla} f \cdot \hat{n}$, där $\hat{n}$ är enhetsnormalen ut av $C(Q, r)$.
(3) Använd differentiation under integral tecken och Gauss' sats för att visa att $I(r)$ är en konstant funktion av r.
(4) Nu visa att $I(r) = f(Q)$.

F.15 Verifiera resultatet av **F.14** för $f(x, y) = xy^3 - yx^3$ och cirkeln av radie 1 med centrum i $(1, 2)$.

F.16 Låt en laddning Q vara likformigt distribuerad i enhetsklotet S. Beräkna det elektriska fältet $\vec{\boldsymbol{E}}$ i en punkt $(0, 0, a)$, $a > 1$

(a) direkt, genom att beräkna den trippelintegralen

$$\int\int\int_S \frac{\rho dV}{4\pi\epsilon_0 r^3}\,\vec{r},$$

där $\vec{r}$ är vektoren från (x, y, z) till $(0, 0, a)$

(b) via Gauss' lag.

***(c)** Beräkna fältet i en punkt $(0, 0, a)$ där $a < 1$.

Ledning : Använd symmetrier.

F.17 Visa att $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{\boldsymbol{F}}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{\boldsymbol{F}}) - \Delta\vec{\boldsymbol{F}}$ för varje C^2 vektorfält $\vec{\boldsymbol{F}}$ i rummet.

Fler övningar om materialen i kapitel 10 kommer senare (kanske!).

***** betyder att övningen är (enligt min åsikt) lite svårare.