MATEMATIK	Dag : 000117 Tid : 8.45 - 13.45.
Göteborgs Universitet	Hjälpmedel : Inga
Peter Hegarty	Vakt : Petter Bränden 0740-479626.

Tentamenskriving i Flervariabelanalys del 2 (MAN 030)

Obs! Fråga 5 är värd 4 poäng. Alla andra frågor är värd 3 poäng. Godkännt för 12 poäng (max.).

1 (i) Låt $\Delta = [a,b] \times [c,d]$ vara en sluten rektangel i planet. Definiera vad det menar för en funktion $f : \Delta \to \mathbf{R}$ att vara integrerbar.
(ii) Bevisa att om f är kontinuerlig, då är f integrerbar.

2. En swimming-pool är cirkulär med diameter $50m$. Djupheten är konstant längs varje V-Ö linje och växer linjärt från $2m$ till $5m$ i den N-S riktningen. Ange volymen av vattnet i poolen.

3. Beräkna $\int_\gamma \vec{\boldsymbol{F}} \cdot d\vec{\boldsymbol{r}}$ där $\vec{\boldsymbol{F}} = (x^2y, \frac{2}{3}x^3, xy)$ och γ är skärningskurvan mellan den hyperboliska paraboloiden $z = y^2 - x^2$ och cylindern $x^2 + y^2 = 1$, orienterad moturs sedd uppifrån.

4. Beräkna flödet av $\vec{\boldsymbol{F}} = (z^2x, \frac{1}{3}y^3 + \tan z, x^2z + y^2)$ ur den övre halven av enhetssfären.

5 (i) För två vektorfält $\vec{\boldsymbol{F}}$ och $\vec{\boldsymbol{G}}$ i rummet, verifiera att

$$\mathrm{div}\left(\vec{\boldsymbol{F}} \times \vec{\boldsymbol{G}}\right) = \vec{\boldsymbol{G}} \cdot \ \mathrm{curl}\vec{\boldsymbol{F}} - \vec{\boldsymbol{F}} \cdot \ \mathrm{curl}\vec{\boldsymbol{G}}. \tag{1}$$

(ii) Beräkna $\int_\gamma 2x \sin y \, dx + (x^2 \cos y - 3y^2)\, dy$, där γ är den del av kurvan $y = x^2$ från $(0,0)$ till $(1,1)$.

6 (i) Formulera *rotkriteriet* (bevisa det INTE !).
(ii) Med hjälp av kriteriet bevisa *Hadamards formul* för den konvergensradien R till en potensserie.
(iii) Skriv ner (med bevis) tre potensserier med $R = 0, 1, \infty$ resp.

7. Låt $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$.

(i) Utan att använda någonting från teorin av Fourier serier, förklara varför $f(x)$ definierar en kontinuerlig funktion i den öppna intervallen $(0, \pi)$.
(ii) Genom att betrakta den Fourier serien till funktionen

$$\phi(x) := \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & 0 \leq x < \pi, \\ -\frac{\pi}{2}, & \pi \leq x < 2\pi, \end{cases} \quad (2)$$

visa att $f(x)$ är konstant för $x \in (0, \pi)$.

8. Beräkna

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n^2 + 5n + 6)n!}. \quad (3)$$

Tentan beräknas vara färdigrättad den 21 januari. Då kan den hämtas i mottagningsrummet mellan kl. 12:30-13:00. Tentamensresultat lämnas ut också telefon 772 35 09 *efter* kl. 14:00.