Tentamenskrivning i Flervariabelanalys (del 2) 00-01-17 : Lösningar

F.1 (i) Definition 1, s. 202 i PB.
(ii) Sats 3, s. 206-7 i PB.

F.2 Det är lätt att se från symmetrin att den medel djupheten av vattnet i poolen är 7/2 m. Alltså, volymen är $\frac{7}{2}\pi(25)^2 = \frac{4375}{2}\pi$ m^3.

F.3 Beräkna $\vec{\nabla} \times \vec{\boldsymbol{F}} = (x, -y, x^2)$. Stokes' sats antyder att $\int_\gamma \vec{\boldsymbol{F}} \cdot d\vec{\boldsymbol{r}} = \int\int_S \left(\vec{\nabla} \times \vec{\boldsymbol{F}}\right) \cdot \hat{n}\, dS$ där S är den del av paraboloiden på insidan av cylindern och $\hat{n}$ pekar upp. S kan parameteriseras som

$$S = \{\vec{r} = (x, y, y^2 - x^2) : x^2 + y^2 \leq 1\}, \tag{1}$$

så att

$$\hat{n}dS = \pm\left(\vec{r}_x \times \vec{r}_y\right)\ dxdy = \pm\left[(1,0,-2x) \times (0,1,2y)\right]\ dxdy = \pm(2x, -2y, 1)\ dxdy. \tag{2}$$

Eftersom $\hat{n}$ pekar upp, då tar vi $\hat{n}\, dS = +(2x, -2y, 1)\ dx\, dy$. Låt enhetsskivan $x^2 + y^2 \leq 1$ kallas för D. Nu har vi att

$$\int\int_S \left(\vec{\nabla} \times \vec{\boldsymbol{F}}\right) \cdot \hat{n} dS = \int\int_D (x, -y, x^2) \cdot (2x, -2y, 1)\ dxdy = \int\int_D (3x^2 + 2y^2)\ dxdy. \tag{3}$$

Från symmetrin är $\int\int_D x^2\ dx\, dy = \int\int_D y^2\ dx\, dy$ och båda beräknas genom att byta till polära koordinator, där vi får t.ex.

$$\int\int_D x^2\ dx\, dy = \left(\int_0^{2\pi} \cos^2\phi d\phi\right)\left(\int_0^1 r^3\ dr\right) = \frac{\pi}{4}. \tag{4}$$

Alltså är $\int_\gamma \vec{\boldsymbol{F}} \cdot d\vec{\boldsymbol{r}} = \frac{5\pi}{4}$.

F.4 Beräkna $\vec{\nabla} \cdot \vec{\boldsymbol{F}} = z^2 + y^2 + x^2$. Låt S_1 beteckna den övre halven av enhetssfären och S_2 den enhetsskivan i det xy-planet. Vi är interesserad av $\int\int_{S_1} \vec{\boldsymbol{F}} \cdot \hat{n}\, dS$. Den Divergens satsen säger att

$$\int\int_{S_1} \vec{\boldsymbol{F}} \cdot \hat{n}\, dS + \int\int_{S_2} \vec{\boldsymbol{F}} \cdot \hat{n}\, dS = \int\int\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{\boldsymbol{F}}\, dV, \tag{5}$$

där V är den övre halven av enhetsklotet. På S_2 är $z = 0$ och $\hat{n} = (0, 0, -1)$ så att

$$\int\int_{S_2} \vec{\boldsymbol{F}} \cdot \hat{n}\, dS = \int\int_{x^2+y^2 \leq 1} (-y^2)\, dx\, dy = -\frac{\pi}{4} \quad \text{(se } \mathbf{F.3}\text{)}. \tag{6}$$

Vi beräknar den volym integralen genom att byta till sfäriska koordinator och får

$$\int\int\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{\boldsymbol{F}}\, dV = \left(\int_0^{2\pi} d\phi\right) \left(\int_0^{\pi/2} \sin\theta\, d\theta\right) \left(\int_0^1 r^4\, dr\right) = \frac{2\pi}{5}. \tag{7}$$

Då är $\int\int_{S_1} \vec{\boldsymbol{F}} \cdot \hat{n}\, dS = \frac{2\pi}{5} + \frac{\pi}{4} = \frac{13\pi}{20}$.

F.5 **(i)** En ganska lång men okomplicerad beräkning. Vi avstår från att ge detaljerna.
(ii) Den lättaste lösningen (som undvikar en lite komplicerad partiell integration) är att observera att fältet $(2x \sin y, x^2 \cos y - 3y^2)$ är konservativt med potential funktion

$$U(x, y) = x^2 \sin y - y^3 + C. \tag{8}$$

Då är den kurvintegralen lika med $U(1, 1) - U(0, 0) = \sin 1 - 1$.

F.6 Titta i GLO, avsnitt 2.4 för den lämpliga materialen.

F.7 **(i)** Först notera att $\sin(2n + 1)x = \sin 2nx \cos x + \sin x \cos 2nx$. Nu skriv serien som

$$f(x) = \cos x \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2nx}{2n + 1}\right) + \sin x \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{2n + 1}\right). \tag{9}$$

Enligt Dirichlet's test (lemma 3.9 och sats 3.10 i GLO) konvergerar båda dessa serier likformigt i varje sluten delintervall till $(0, \pi)$. Alltså, enligt Kor. 3.4 i GLO är $f(x)$ kontinuerlig i $(0, \pi)$.

(ii) Beräkna direkt den Fourier serien till ϕ och får du serien $2f(x)$. ϕ satisfierar de Dirichlet villkoren, alltså är $\phi(x) = 2f(x)$ för $0 < x < \pi$. Dvs,

$f(x)$ har det konstanta värdet $\frac{\pi}{4}$ för $x \in (0, \pi)$.

F.8 Jag ska ge TRE alternativa lösningar. Alla tre är värd att läsa. Alla tre beror på att först notera att $n^2 + 5n + 6 = (n+2)(n+3)$.

LÖSNING 1 : Betrakta den potensserien

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+3}}{(n+2)(n+3)n!}. \tag{10}$$

Notera att $R = \infty$ för denna serie och att vi vill beräkna $f(1)$. Serien kan differentieras termvis. Differentiera två gånger och får du att

$$f''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!} = xe^x. \tag{11}$$

Nu integrera vi igen två gånger (från 0 till x) för att få en formul till $f(x)$. Notera att $f(0) = f'(0) = 0$. Då får du efter två integrationer att

$$f(x) = (x-2)e^x + x + 2. \tag{12}$$

Äntligen, $f(1) = 3 - e$.

LÖSNING 2 : Betrakta den potensserien

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+2)(n+3)n!}. \tag{13}$$

$R = \infty$ så att serien kan integreras termvis, och vi vill beräkna $f(1)$. Integrera termvis och får du att

$$\int_0^x f(t)\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+3)!}. \tag{14}$$

Nu simplificera den högra summan som följer. Vi har

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+3)!} = \frac{1}{x^2} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{x^2}\left[e^x - (1 + x + (x^2/2))\right]$. Då från differentiation av (14) får vi att

$$f(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x^2}\left[e^x - (1 + x + (x^2/2))\right]\right] = \frac{e^x + 1}{x^2} - \frac{2(e^x - 1)}{x^3}, \tag{15}$$

så att $f(1) = 3 - e$.

LÖSNING 3 :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{(n+3)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+3)-2}{(n+3)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)!} - 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+3)!} \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} - 2\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n!} \\
&= [e - (1+1)] - 2\left[e - (1 + 1 + \tfrac{1}{2!})\right] \\
&= 3 - e.
\end{aligned}$$