Tentamenskrivning i Flervariabelanalys (del 2) 00-04-** : Lösningar

F.1 (i) Definition 2, s. 303 och definition s. 311 i PB.
(ii) Sats 4, s. 311-2 i PB.

F.2 I sfäriska koordinator blir integralen

$$\left(\int_0^{2\pi} d\phi\right)\left(\int_0^{\pi/4}\cos^2\theta\sin\theta\, d\theta\right)\left(\int_1^2 r^4\, dr\right) = \frac{31\pi}{15\sqrt{2}}\left(2\sqrt{2}-1\right). \tag{1}$$

F.3 Beräkna $\vec{\nabla}\times\vec{\boldsymbol{F}} = (0, x^2, y^2)$. Stokes' sats antyder att $\int_\gamma \vec{\boldsymbol{F}}\cdot d\vec{\boldsymbol{r}} = \int\int_S \left(\vec{\nabla}\times\vec{\boldsymbol{F}}\right)\cdot\hat{n}\, dS$ där S är den del av planet på insidan av cylindern och $\hat{n}$ pekar upp. Alltså är $\hat{n}\, dS = (1,1,1)\, dx\, dy$. Låt skivan $x^2+y^2\leq 9$ kallas för D. Nu har vi att

$$\int\int_S \left(\vec{\nabla}\times\vec{\boldsymbol{F}}\right)\cdot\hat{n}\, dS = \int\int_D (0,x^2,y^2)\cdot(1,1,1)\, dx\, dy = \int\int_D (x^2+y^2)\, dx\, dy. \tag{2}$$

Från symmetrin är $\int\int_D x^2\, dx\, dy = \int\int_D y^2\, dx\, dy$ och båda beräknas genom att byta till polära koordinator, där vi får t.ex.

$$\int\int_D x^2\, dx\, dy = \left(\int_0^{2\pi}\cos^2\phi\, d\phi\right)\left(\int_0^3 r^3\, dr\right) = \frac{81\pi}{4}. \tag{3}$$

Alltså är $\int_\gamma \vec{\boldsymbol{F}}\cdot d\vec{\boldsymbol{r}} = \frac{81\pi}{2}$.

F.4 Beräkna $\vec{\nabla}\cdot\vec{\boldsymbol{F}} = 3y^2$. Låt S_1 beteckna den buktiga delen av cylindern mellan planen, S_2 den del av planet $z=0$ och S_3 den del av planet $z=y-3$ på insidan av cylindern. Vi är interesserad av $\int\int_{S_1}\vec{\boldsymbol{F}}\cdot\hat{n}\, dS$. Den Divergens satsen säger att

$$\int\int_{S_1}\vec{\boldsymbol{F}}\cdot\hat{n}\, dS + \int\int_{S_2}\vec{\boldsymbol{F}}\cdot\hat{n}\, dS + \int\int_{S_3}\vec{\boldsymbol{F}}\cdot\hat{n}\, dS = \int\int\int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{\boldsymbol{F}}\, dV, \tag{4}$$

där V är området som begränsas av S_1, S_2 och S_3. På S_2 är $\hat{n} = (0,0,1)$ så att

$$\int\int_{S_2}\vec{\boldsymbol{F}}\cdot\hat{n}\, dS = \int\int_{x^2+y^2\leq 9} xy\, dx\, dy = 0 \quad \text{(symmetri)}. \tag{5}$$

På S_3 är $z = y - 3$ och $\hat{n}\, dS = (0, 1, -1)\, dx\, dy$ så att

$$\int\int_{S_3} \vec{\boldsymbol{F}}\cdot\hat{n} dS = \int\int_{x^2+y^2\le 9} (y^3+y-3-xy)\, dxdy = -3 \int\int_D dxdy = -27\pi \quad \text{(symmetri igen).} \tag{6}$$

Den volym integralen är

$$\int\int\int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{\boldsymbol{F}} dV = \int\int_{x^2+y^2\le 9} 3y^2\, dxdy \left(\int_{y-3}^{0} dz\right) = 9 \int\int_D y^2\, dxdy = \frac{729\pi}{4}. \tag{7}$$

Då är $\int\int_{S_1} \vec{\boldsymbol{F}} \cdot \hat{n}\, dS = \frac{729\pi}{4} + 27\pi = \frac{837\pi}{4}$.

F.5 **(i)** Låt γ_2 vara den räta linje stycken från $(0, 1)$ till $(0, 0)$ och γ_3 den räta linje stycken från $(0, 0)$ till $(1, 0)$. Green's sats antyder att

$$\int_{\gamma+\gamma_2+\gamma_3} (x^3 - y^3)\, dx + (x^3 + y^3)\, dy = \int\int_D (3x^2 + 3y^2)\, dx\, dy, \tag{8}$$

där D är den första kvadranten av enhetsskivan. Byta till polära koordinator och får du lätt att integralen över D är $\frac{3\pi}{8}$. Men man beräknar också lätt att $\int_{\gamma_2} = -\frac{1}{4}$ och $\int_{\gamma_3} = +\frac{1}{4}$. Alltså, antyder (8) att $\int_{\gamma_1} = \frac{3\pi}{8}$.
(ii) Green's sats antyder att arean är

$$A = \frac{1}{2} \oint x\, dy - y\, dx = \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} \cos^2 t \sin^2 t\, dt = \frac{3\pi}{8}, \tag{9}$$

där den sista integralen beräknas enklast med hjälp av de trigonometriska formulerna $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ och $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$.

F.6 Lemma 2.8 och Sats 2.9 i GLO.

F.7 Man ser att serien konvergerar absolut när $|x| < 1$ och likformigt i varje sluten delintervall darav genom att jämföra med den geometriska serien $\sum |x|^n$ och använda Weierstrass' M-test. Alltså är f kontinuerlig i $(-1, 1)$ enligt Kor. 3.4 i GLO. Serien divergerar för $|x| > 1$ eftersom den n:te termen går inte mot noll. Serien ses divergera också för $x = 1$ genom att jämföra med serien $\sum \frac{1}{n}$. Men serien konvergerar för $x = -1$, enligt Dirichlet's test.

Alltså, den definitionsmängden till f är $[-1, 1)$ och f är ju kontinuerlig i inren till denna mängd, nämligen i $(-1, 1)$.

F.8 Byta variabler till $w := \frac{z-2}{3}$ så att serien blir

$$\frac{1}{9} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\cos \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n^2}}{n^2} w^n. \tag{10}$$

Hadamard's formul antyder att

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \to \infty} \left(\cos \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n. \tag{11}$$

Kom ihåg den Taylor utvecklingen $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4)$, så att $\cos \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 - \frac{1}{2n} + O(\frac{1}{n^2})$. Det följer att $\left(\cos \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n \to e^{-1/2}$, så att $R = \sqrt{e}$ för den w-serien. Alltså, den konvergensskivan för den ursprungliga z-serien är skivan $\left|\frac{z-2}{3}\right| < \sqrt{e}$, som har centrum i $z = 2$ och radie $3\sqrt{e}$.