Tentamenskrivning i Flervariabelanalys (del 2) 00-04-18 : Lösningar

F.1 (i) Om $\vec{\boldsymbol{F}}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ är ett C^1-vektorfält i något öppet område D som innehåller Ω, då är

$$\int_{\partial\Omega} \vec{\boldsymbol{F}} \cdot d\vec{\boldsymbol{r}} = \int\int_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \, dx \, dy,$$

där $\partial\Omega$ är orienterad så att Ω ligger till vänster av $\partial\Omega$.
(ii) Sats 1, s. 294-6 i PB.

F.2 Skärningskurvan mellan de två ytorna har ekvationen

$$x^2 + y^2 = z = 1.$$

Då ges volymen av

$$\int\int_{x^2+y^2\leq 1} \left(2 - \sqrt{x^2+y^2} - (x^2+y^2) \right) \, dx \, dy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(2 - r - r^2 \right) \, r \, dr \, d\theta = \frac{5\pi}{6}.$$

F.3 Beräkna $\vec{\nabla} \times \vec{\boldsymbol{F}} = (1,2,1)$. Stokes' sats antyder att $\int_\gamma \vec{\boldsymbol{F}} \cdot d\vec{\boldsymbol{r}} = \int\int_S \left(\vec{\nabla} \times \vec{\boldsymbol{F}} \right) \cdot \hat{n} \, dS$ där S är insidan av cirkeln $x^2 + y^2 = y = z$ och $\hat{n}$ pekar upp. Då är $\hat{n} \, dS = (0,-1,1) \, dx \, dy$ och

$$\int\int_S \left(\vec{\nabla} \times \vec{\boldsymbol{F}} \right) \cdot \hat{n} \, dS = \int\int_{x^2+(y-\frac{1}{2})^2 \leq \frac{1}{4}} (1,2,1) \cdot (0,-1,1) \, dx \, dy = -\frac{\pi}{4}.$$

F.4 Beräkna $\vec{\nabla} \cdot \vec{\boldsymbol{F}} = 4y$. Den Divergens satsen säger att

$$\int\int_{\partial\Omega} \vec{\boldsymbol{F}} \cdot \hat{n} \, dS \int\int\int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{\boldsymbol{F}} \, dV = \int_0^4 \int_0^{4-x} \int_0^{4-x-y} 4y \, dz \, dy \, dx = \frac{128}{3}.$$

(Beräkningen av integralen är lätt och lämnas till läsaren).

F.5 **(i)** En ganska lång men okomplicerad beräkning. Vi avstår från att ge detaljerna men noterar att resultatet beror på att, eftersom $\vec{\boldsymbol{F}}$ är C^2, de blandade partiella derivatorna är lika.
(ii) Den lättaste lösningen (som undvikar en övning i partiell integration) är att observera att fältet $(xe^y, \frac{1}{2}x^2e^y)$ är konservativt med potential funktion

$$U(x,y) = \frac{1}{2}x^2e^y + C.$$

Då är den kurvintegralen lika med $U(2,2) - U(1,1) = 2e^2 - \frac{1}{2}e$.

F.6 **(i)** Följden sägs vara *likformigt konvergent* i M om, för varje $\epsilon > 0$, finns det $N_\epsilon >> 0$ så att

$$n, m > N_\epsilon \Rightarrow |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon \quad \forall\, x \in M.$$

(ii) Sats 3.1 i GLO.

F.7 Först notera att serien divergerar när x är en heltal-multipel av 2π, genom jämförelse med serien $\sum 1/n$. För alla andra x konvergerar serien och likformigt när x är begränsad bort från multipler av 2π, enligt Dirichlet's test (lemma 3.9 och sats 3.10 i GLO).

Alltså, för del **(i)**, $D = \mathbf{R} - \{2\pi n : n \in \mathbf{Z}\}$. För del **(ii)** räcker det från ovanstående anmärkningar att observera att varje kompakt delmängd till D är begränsad bort från multipler av 2π. För del **(iii)**, enligt Kor. 3.4 i GLO är $f(x)$ kontinuerlig i D.

F.8 Låt summan kallas för S. Sätt

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}.$$

Då är

$$S = \frac{1}{3}\frac{f(2/9)}{2/9} = \frac{3}{2}f(2/9).$$

Notera att $R = 1 > 2/9$ för serien $f(x)$ så att serien kan differentieras termvis. Differentiera två gånger och får du att

$$f''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Nu integrera vi igen två gånger (från 0 till x) för att få en formul till $f(x)$. Notera att $f(0) = f'(0) = 0$. Då får du efter två integrationer att

$$f(x) = (1-x)\ln(1-x) - (1-x) + 1.$$

Äntligen, $f(2/9) = \frac{7}{9} \ln \frac{7}{9} + \frac{2}{9}$.

Svar : $\frac{7}{6} \ln \frac{7}{9} + \frac{1}{3}$.